



Concours d'accès en 1^{ère} année des ENSA Maroc
Juillet 2018

Epreuve de Mathématiques

Durée : 1H30 min

Calculatrices, téléphones et tous types de documents non autorisés

Q1. (u_n) une suite réelle.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 2, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} =$$

A) 0

B) 1

C) $+\infty$

D) 2

Q2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} =$$

A) 0

B) 1

C) $-\infty$

D) $+\infty$

Q3.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \cdot \ln(\ln x) =$$

A) 1

B) 0

C) $+\infty$

D) $-\infty$

Q4. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

A) $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

B) $u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{4}$

C) $u_{2n} - u_n < \frac{1}{3}$

D) $u_{2n} - u_n < \frac{1}{2}$

Q5. Pour la même suite que Q4. On a :

A) $u_{2^{10}} \geq 6$

B) $u_{2^{10}} < 6$

C) $u_{2^{10}} = 3$

D) $u_{2^{10}} < 5$.

Q6. $\cos(\text{Arctan } x) =$

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|
| A) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | B) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | C) $\frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$ | D) $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|------------------------------|

Q7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$ Alors f est :

- | | | | |
|--------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| A) Constante | B) Strictement croissante | C) Strictement décroissante | D) périodique de période 2 |
|--------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|

Q8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} =$$

- | | | | |
|------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| A) $f'(a)$ | B) $f(a) + af'(a)$ | C) $f(a) - f'(a)$ | D) $f(a) - af'(a)$ |
|------------|--------------------|-------------------|--------------------|

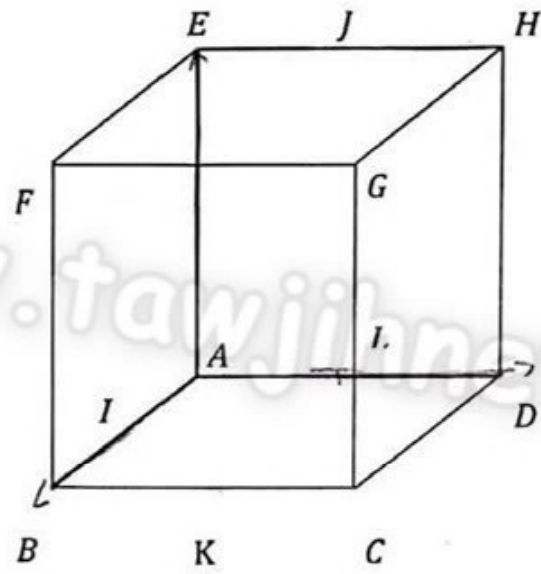
Q9.
$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx =$$

- | | | | |
|--------------------|------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| A) $\frac{\pi}{4}$ | B) $\frac{2}{3}$ | C) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$ | D) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$ |
|--------------------|------------------|----------------------------------|----------------------------------|

Q10.
$$\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln(x^2 + 1) dx =$$

- | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---|---------------------|
| A) $\sqrt{3} \ln 2 - \frac{\pi}{9}$ | B) $\sqrt{3} \ln 2 + \frac{\pi}{9}$ | C) $2\left(\sqrt{3} \ln 2 - \frac{\pi}{9}\right)$ | D) $\sqrt{3} \ln 2$ |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---|---------------------|

Exercice 1 : On considère le cube ABCDEFGH et on note $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ un repère orthonormé de l'espace.



Q11. Les coordonnées du vecteur \vec{FD} sont

A) $(1, 1, 1)$	B) $(-1, 1, 1)$	C) $(-1, 1, -1)$	D) $(1, 1, 0)$
----------------	-----------------	------------------	----------------

Q12. Une représentation paramétrique de la droite (FD) est

A) $\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$	B) $\begin{cases} x = -t \\ y = -t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$	C) $\begin{cases} x = -t \\ y = t + 1 \\ z = -t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$	D) $\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = +t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$
---	---	--	---

Q13. On note I le milieu du segment [AB], J le milieu du segment [EH] et K le milieu du segment [BC]. La droite (FD)

A) est orthogonale au plan (IJK)	B) n'est pas orthogonale au plan (IJK)	C) appartient au plan (IJK)	D) parallèle au plan (IJK)
----------------------------------	--	-----------------------------	----------------------------

Q14. Une équation cartésienne du plan (IJK) est $ax + by + cz + d = 0$ avec

A) $a = -1, b = -1, c = 1$ et $d = -1/2$	B) $a = 1, b = -1, c = 1$ et $d = -1/2$	C) $a = -1, b = -1, c = 1$ et $d = 1/2$	D) $a = 1, b = 1, c = -1$ et $d = -1/2$
--	---	---	---

Q15. Les coordonnées du point M; intersection de la droite (FD) et le plan (IJK) sont :

A) $(1/2, 1/2, 1/2)$

B) $(1/2, 0, 1/2)$

C) $(1/2, 1/2, 0)$

D) $(1, 1, 0)$

Q16. Le triangle IJK est

A) Equilatéral

B) Rectangle en J

C) Rectangle en K

D) Rectangle en I

Exercice 2: Le QCM du concours ENSA comporte 20 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées et une seule est correcte. Un étudiant décide de remplir la grille-réponses en cochant au hasard une réponse pour chacune des 20 questions. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n \leq 20$, on note A_n « répondre au hasard exactement n fois correctement » ; l'évènement A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $20 - n$ sont incorrectes.

$\binom{n}{p}$ désigne le nombre de combinaison de p parmi n .

Q17. Le nombre de grilles-réponses possibles est

A) 24

B) 20^4

C) 80

D) 4^{20}

Q18. La probabilité de ne donner aucune réponse correcte est $P(A_0) =$

A) $\frac{3^{20}}{4^{20}}$

B) $\frac{24}{4^{20}}$

C) $\frac{1}{20^4}$

D) $\frac{1}{80}$

Q19. La probabilité de donner exactement n bonnes réponses correctes est $P(A_n) =$

A) $\frac{\binom{20}{n} 3^n}{4^{20}}$

B) $\frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{4^{20}}$

C) $\frac{\binom{20}{3} 3^{20-n}}{20^4}$

D) $\frac{\binom{20}{3} 3^n}{80}$

Q20. La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est

A) $\sum_{n=6}^{20} \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{4^{20}}$

B) $\sum_{n=0}^6 \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{4^{20}}$

C) $\sum_{n=6}^{20} \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{20^4}$

D) $\sum_{n=0}^6 \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{20^4}$

Corrigé du concours d'accès en 1ère année des ENSA Maroc - Juillet 2018
effectué par Mr. EL ABBASSI Mohammed professeur de Mathématiques au
lycée Ibn abdoun - Khouribga
Le 19/07/2018

Question 1

Cet exercice est une application d'un théorème dit théorème de Césaro :

Théorème

Si (u_n) est une suite réelle tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = l$.

Si on connaît d'avance ce théorème on peut répondre à la question très rapidement en choisissant le D) comme réponse correcte.

En effet, considérons à la place de u_n le terme $u_n - u_{n-1}$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme

on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1}) = 2$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1})}{n} = 2$ c.à.d $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - u_0}{n} = 2$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{u_0}{n} = 2$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 2$.

Mais, un élève du lycée ne connaît pas ce théorème, et pourtant s'il est malin, il peut quand même répondre à la question, en prenant un cas très particulier d'une suite arithmétique de raison 2 c.à.d tel que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = 2$, on voit bien qu'on a :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 2$ et en même temps $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = u_0 + 2n$ et par suite on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0 + 2n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{n} + 2 = 2.$$

Question 2

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left| \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} \right| = \frac{|\sin^2 n - \cos^3 n|}{n} \leq \frac{2}{n}$ (en appliquant l'inégalité triangulaire)

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} = 0$, donc la bonne réponse est le A).

On peut procéder autrement, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos^3 n}{n} = 0$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin^2 n}{n} - \frac{\cos^3 n}{n} = 0.$$

Question 3

On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} x \cdot \ln(\ln x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$ (en posant $t = \ln x$)

D'où la bonne réponse est le B).

Question 4

On a : $(\forall n \in N^*) u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et comme $(\forall k \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\}) : \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ alors on a :

$(\forall n \in N^*) u_{2n} - u_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ d'où la bonne réponse est le A).

Question 5

On a d'après la question 4 : $(\forall k \in N^*) u_{2^k} = u_{2 \cdot 2^{k-1}} \geq \frac{1}{2} + u_{2^{k-1}}$ et donc en appliquant ce résultat

on peut démontrer, aisément, par récurrence que $(\forall n \in N^*) u_{2^n} \geq \frac{n-1}{2} + u_2$ et comme

$u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ alors $(\forall n \in N^*) u_{2^n} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{n+2}{2}$.

On en déduit que : $u_{2^{10}} \geq \frac{10+2}{2} = 6$. D'où la bonne réponse c'est le A).

On pourrait procéder autrement : on a :

$$u_{2^{10}} = u_{2 \cdot 2^9} \geq \frac{1}{2} + u_{2^{10-1}} = \frac{1}{2} + u_{2 \cdot 2^8} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + u_{2^8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + u_{2^{10-2}} \geq \dots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + u_{2^{10-9}} = 6$$

Question 6

On a $(\forall x \in R) \cos^2(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arc tan } x)} = \frac{1}{1 + x^2}$ et donc $\cos(\text{Arc tan } x) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Et comme $(\forall x \in R) \text{Arc tan } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et on sait que $\left(\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \cos t > 0$ alors

$(\forall x \in R) \cos(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. D'où la bonne réponse est le B).

On peut déduire le résultat autrement : Comme chacune des deux fonctions Arc tan et \cos sont définies sur l'ensemble R tout entier alors les réponses candidates sont B) ou C) et

comme $(\forall x \in R) \text{Arc tan } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et $\left(\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) \cos t > 0$ alors la bonne réponse est B).

Question 7

On peut montrer, aisément, par récurrence sur n que $(\forall x \in R) (\forall n \in N) f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

En fixant le x et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) \text{ (en utilisant le fait que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2^n} = 0 \text{ et le fait que } f \text{ est continue en } 0 \text{)}.$$

D'où $(\forall x \in R) f(x) = f(0) = \text{cste}$. D'où la bonne réponse est le A).

Question 8

On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(a) + af(a) - af(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a)(x-a) - a(f(x) - f(a))}{x-a} = f(a) - af'(a).$$

D'où la bonne réponse est le D).

Question 9

$$\text{On a : } \int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^4-1+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^2-1 + \frac{1}{x^2+1} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x + \text{Arc tan } x \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}.$$

D'où la bonne réponse est le C).

Question 10

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln(x^2+1) dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' \ln(x^2+1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}x^3 (\ln(x^2+1))' dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}x^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x^2+1) \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{1+x^2} dx \\ &= \sqrt{3} \ln(4) - \left[\frac{1}{3}x^3 - x + \text{Arc tan } x \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \ln(2) - \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = 2 \left(\sqrt{3} \ln 2 - \frac{\pi}{9} \right) \end{aligned}$$

D'où la bonne réponse est le C).

$$\left(\text{On rappelle que } \text{Arc tan } 1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \text{Arc tan } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \right)$$

Question 11

Dans le repère $(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ on a : $F(1,0,1)$ et $D(0,1,0)$, d'où $\overline{FD}(-1,1,-1)$.

D'où la bonne réponse est C).

Question 12

La droite (FD) passe par le point $D(0,1,0)$ et est dirigée par le vecteur $\overline{FD}(-1,1,-1)$

$$\text{Donc } (FD) \begin{cases} x = -t \\ y = 1+t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad . \text{ D'où la bonne réponse est le C) .}$$

Pour la suite de l'exercice, on a :

$$I\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), J\left(0, \frac{1}{2}, 1\right), K\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ et } \overline{IJ}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \overline{IK}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \overline{JK}(1, 0, -1)$$

Question 13

On sait que le vecteur

$\vec{IJ} \wedge \vec{IK} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ est orthogonale au plan (IJK) et comme $\vec{FD}(-1, 1, -1) = 2\vec{IJ} \wedge \vec{IK}$ alors le vecteur \vec{FD} est orthogonale au plan (IJK) .

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 14

Comme $-\vec{FD}(1, -1, 1)$ est normal au plan (IJK) alors $(IJK): x - y + z + d = 0$ et comme

$I\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) \in (IJK)$ alors $d = -\frac{1}{2}$ d'où $(IJK): x - y + z - \frac{1}{2} = 0$. D'où la bonne réponse est le B) .

Question 15

Le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le milieu du segment $[FD]$, donc il appartient à la droite (FD)

et comme ses coordonnées vérifient l'équation de (IJK) alors il appartient au plan (IJK)

et comme $(FD) \perp (IJK)$ alors ce point est bien leur point d'intersection .

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 16

On a $IK^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2}$, $IJ^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2}$ et $JK^2 = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$

et on remarque que $IK^2 + IJ^2 = JK^2$, d'où le triangle IJK est rectangle en I .

D'où la bonne réponse est le D) .

Exercice 2

Question 17

Chaque grille-réponses possible est composée de 20 questions et pour chaque question

On a 4 choix possibles, donc d'après le principe du produit il y a 4^{20} grilles possibles .

D'où la bonne réponse est le D) .

Question 18

Si on désigne par Ω l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire alors

on a $\text{card}\Omega = 4^{20}$.

On a : $P(A_0) = \frac{\text{card}(A_0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3^{20}}{4^{20}}$, car pour chaque réponse fautive il y a 3 choix possibles .

D'où la bonne réponse est le A) .

Question 19

Désignons par X la variable aléatoire qui est égale au nombre de réponses correctes. Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres 20 et $p = \frac{1}{4}$. (pour chaque question la probabilité de choisir la bonne réponse est $\frac{1}{4}$).

$$\text{On a } P(A_n) = P(X = n) = C_{20}^n \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{20-n} = \binom{20}{n} \frac{1}{4^n} \left(\frac{3}{4}\right)^{20-n} = \binom{20}{n} \frac{3^{20-n}}{4^{20}} .$$

D'où la bonne réponse est le B) .

Question 20

La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est égale à

$$P(X \geq 6) = \sum_{n=6}^{20} P(X = n) = \sum_{n=6}^{20} \frac{\binom{20}{n} 3^{20-n}}{4^{20}} .$$

D'où la bonne réponse est le A) .

End

J'espère avoir été bien clair.

Toute remarque ou suggestion est la bienvenue

elabbassimed2014@gmail.com