

Concours d'accès en 1^{ère} année des ENSA Maroc
Juillet 2016

Epreuve de Mathématiques

Durée : 1H30 min

Exercice 1:

Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, A, B, C leurs images dans le plan. On note

$$t = \frac{c - a}{b - a}$$

Q1. Soient $r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}$, la relation $t = re^{i\theta}$ se traduit géométriquement par :

A) $AC = rAB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0[2\pi]$

B) $AB = rAC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta[2\pi]$

C) $AC = rAB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta[2\pi]$

D) $AC = r^2 AB$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta[2\pi]$

Q2. A, B, C sont alignés si et seulement si

A) $t \in i\mathbb{R}$

B) $t \in \mathbb{R}_+$

C) $t \in i\mathbb{R}_+$

D) $t \in \mathbb{R}$

Q3. Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

A) $t \in i\mathbb{R}$

B) $t \in \mathbb{R}_+$

C) $t \in i\mathbb{R}_+$

D) $t \in \mathbb{R}$

Exercice 2:

Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

Q4. Le nombre de parties de E est

A) n^2

B) 2^n

C) n^n

D) $n!$

Q5. Le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est

A) $n 2^{n-p}$

B) $p n 2^{n-p}$

C) $p 2^{n-p}$

D) 2^{n-p}



Q6. On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés strictement supérieures à 1) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

A) C_{p+q}^q

B) qC_{p+p}^q

C) C_{pq}^q

D) 2^{p+q}

Q7. Soit f la fonction réelle définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

A) f est injective

B) f est surjective

C) f n'est pas injective

D) f est injective et n'est pas surjective

Q8. Combien le nombre $15!$ admet-il de diviseurs ?

A) 4032

B) 3042

C) 2034

D) 3044

Q9. Un QCM comporte 20 questions, pour chacune d'elles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte.

Le nombre de grilles réponses possibles est :

A) 4^{20}

B) 20^4

C) 800

D) 80

Q10. Soit $(x, y, z) \in ([0,1])^3$: $\alpha = \text{Minimum} \{x(1-y); y(1-z); z(1-x)\}$

A) $\alpha = 0$

B) $\alpha > \frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{8} < \alpha < \frac{1}{4}$

D) $\alpha \leq \frac{1}{4}$



Q11.

$$\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k C_{2016}^k =$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Q12.

$$\sum_{1 \leq i \leq 10} \sum_{1 \leq j \leq 10} (i+j)^2 =$$

A) 10000

B) 10750

C) 13000

D) 13750

Q13. Toute fonction discontinue est :

A) constante

B) non dérivable

C) dérivable

D) périodique

Q14.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

A) f' n'est pas continue en 0

B) f' est continue en 0

C) f' admet une limite finie en 0

D) f' a pour limite $+\infty$ en 0

Q15.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} =$$

A) 1

B) e^{-4}

C) \sqrt{e}

D) 0

Q16.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3}{x + \sqrt{x}}$$

A) $+\infty$

B) 0

C) 1

D) 3

Q17. Soit $r_i (i = 1, 4)$ les quatre racines de l'équation réelle :

$$(x - 7)(x - 5)(x + 4)(x + 6) = 608$$

Le produit des racines

$$\prod_{i=1}^4 r_i$$

vaut :

A) 464

B) 608

C) 232

D) 840

Q18.

$$\int_e^{e^2} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} dx =$$

A) $1 - \ln 2$

B) $1 + \ln 2$

C) $\ln 2$

D) 1

Q19.

$$\int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx =$$

A) $\frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$

B) $\frac{\pi^2 + 4}{\pi^3}$

C) $\frac{4}{\pi^3}$

D) $\frac{-4}{\pi^3}$

Q20. Soient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$$

et

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$$

A) $I = J = 0$

B) $I = \frac{\pi}{2}$ et $J = \frac{\pi}{4}$

C) $I = J = \frac{\pi}{4}$

D) $I = \frac{\pi}{3}$ et $J = \pi$

**Correction du Concours d'entrée en 1^{ère} année du cycle préparatoire
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées**

Correction mathématique

Q1 : réponse C

on a :

$$t = re^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |t| = r \\ \arg(t) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = r \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = rAB \\ \arg\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

Q2. Réponse D.

A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

si et seulement si $t \in \mathbb{R}$

Q3. Réponse A.

Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\arg\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

si et seulement si $t \in i\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Q4. Réponse B.

Le nombre de parties de E est : $2^{\text{card}(E)} = 2^n$

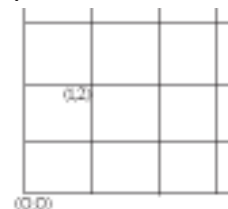
Q5. Réponse C.

Une parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est la réunion d'un singleton de A et d'une partie de $E \setminus A$.

On a p façon pour choisir un élément de A et 2^{n-p} pour choisir une partie de $E \setminus A$ (car $\text{card}(E \setminus A) = n - p$), ainsi le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A est $p2^{n-p}$.

Q6. Réponse A.

On peut vérifier que pour le cas particulier $p=1$ et $q=2$, le nombre de chemin possible est 3.



Or $C_{1+2}^2 = 3$; $2C_{1+2}^2 = 6$; $C_{1 \times 2}^2 = 1$ et $2^{1+2} = 8$, alors la réponse est A.

Q7. Réponse C.

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = \frac{2}{\frac{1}{x} + x}$, alors $f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, or $2 \neq \frac{1}{2}$ alors f n'est pas

injective. (de même pour n'importe quel réel non nul α on a $f(\alpha) = f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$)

Surjectivité de f : pour tous réels x et y , on a : $f(x) = y \Leftrightarrow yx^2 - 2x + y = 0$

Le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R}; yx^2 - 2x + y = 0$ est $\Delta = 4(1 - y^2)$, ainsi f n'est pas surjective

(il suffit de prendre $y \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

La réponse est donc C.

Q8. Réponse A.

On a :

$$\begin{aligned} 15! &= 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \\ &= 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Donc le nombre de diviseurs de $15!$ est $12 \times 7 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 = 4032$.

Q9. Réponse A.

Pour chaque question on choisie une réponse unique, donc le nombre de grilles possibles est

$$\left(C_4^1\right)^{20} = 4^{20}$$

Q10. Réponse A.

On a $\alpha \geq 0$ car $\forall t \in [0;1], 1-t \in [0;1]$. d'autre part, pour $x=0$ et y quelconque $x(1-y)=0$.

Ainsi $\alpha = 0$.

Q11. Réponse A.

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2016} (-1)^k C_{2016}^k &= \sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^k (-1)^k 1^{2016-k} \\ &= (-1+1)^{2016} \\ &= 0\end{aligned}$$

Q12. Réponse D.

On a

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq i \leq 10} \sum_{1 \leq j \leq 10} (i+j)^2 &= \sum_{1 \leq i \leq 10} \sum_{1 \leq j \leq 10} (i^2 + 2ij + j^2) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 10} \left(\sum_{j=1}^{10} i^2 + 2i \sum_{j=1}^{10} j + \sum_{j=1}^{10} j^2 \right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 10} \left(10i^2 + 2i \frac{10 \times 11}{2} + \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \right) \\ &= 10 \sum_{1 \leq i \leq 10} i^2 + 110 \sum_{1 \leq i \leq 10} i + \sum_{1 \leq i \leq 10} 385 \\ &= 10 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 110 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 \times 385 \\ &= 13750\end{aligned}$$

On rappelle que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (on a aussi $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.)

Q13. Réponse B.

Toute fonction discontinue est non dérivable.

Q14. Réponse A.

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Or la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0, alors si f' n'admet de limite en 0.

Donc la fonction f' n'est pas continue en 0.

$(f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}^*, \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|).$

Q15. Réponse B.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x+2) \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)}.$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 \times \frac{\ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)}{\frac{x-1}{x+3} - 1} \times \frac{x+2}{x+3} = -4.$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)}{\frac{x-1}{x+3} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\ln(t)}{t-1} = 1.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = e^{-4}.$$

Q16. Réponse A.

$$\text{On a } \forall x \in]0; +\infty[, \frac{2 \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right) - \sin \left(\frac{1}{x} \right) + 3}{x + \sqrt{x}} \geq \frac{2}{x + \sqrt{x}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x + \sqrt{x}} = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right) - \sin \left(\frac{1}{x} \right) + 3}{x + \sqrt{x}} = +\infty.$$

Q17. Réponse C.

$$\text{On pose } P(x) = (x-7)(x-5)(x+4)(x+6) - 608.$$

$$\text{Donc } P(x) = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4), \text{ ainsi :}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^4 r_i &= P(0) \\ &= 7 \times 5 \times 4 \times 6 - 608 \\ &= 230 \end{aligned}$$

Q18. Réponse B.

On a

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx &= \int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx \\ &= \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= [\ln(\ln x) + \ln x]_e^{e^2} \\ &= 1 + \ln 2\end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx &= \int_e^{e^2} \frac{(x \ln x)'}{x \ln x} dx \\ &= [\ln |x \ln x|]_e^{e^2} \\ &= 1 + \ln 2\end{aligned}$$

Q19. Réponse A.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 \sin(\pi x) dx &= \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 x \cos(\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^2} [x \sin(\pi x)]_0^1 - \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \sin(\pi x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} x^2 \cos(\pi x) \right]_0^1 + \frac{2}{\pi^2} [x \sin(\pi x)]_0^1 + \frac{2}{\pi^3} [\cos(\pi x)]_0^1 \\ &= \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}\end{aligned}$$

Q20. Réponse C.

$$\text{On a } \begin{cases} J + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \\ J - I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = [\ln |\sin x + \cos x|]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } I = J = \frac{\pi}{4}.$$