



Concours d'accès en 1^{ère} année des ENSA Maroc
Août 2014

Epreuve de Mathématiques

Durée : 1H30 min

Exercice 1 :

Soit u_n et v_n les suites réelles définies par :

$$u_0 = \alpha, v_0 = \beta \text{ avec } 0 < \alpha < \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \end{cases}$$

On pose : $x_n = \frac{u_n}{v_n}$ et $y_n = u_n - v_n$

Q1. La suite (x_n) :

- | | | | |
|---|--------------------|--------------------|------------|
| A) Converge vers $\frac{\alpha}{\beta}$ | B) Converge vers 1 | C) Converge vers 0 | D) Diverge |
|---|--------------------|--------------------|------------|

Q2. La suite (y_n) :

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|------------|
| A) Converge vers $\alpha - \beta$ | B) Converge vers $\alpha + \beta$ | C) Converge vers 0 | D) Diverge |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|------------|

Q3. La suite (u_n) :

- | | | | |
|---------------------------|--------------------------|--------------------|------------|
| A) Converge vers α | B) Converge vers β | C) Converge vers 0 | D) Diverge |
|---------------------------|--------------------------|--------------------|------------|

Q4. La suite (v_n) :

- | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------|
| A) Converge vers $\alpha - \beta$ | B) Converge vers $\beta - \alpha$ | C) Converge vers β | D) Diverge |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|------------|

Q5. Soit δ un élément de $]0, 1[$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + \delta^{2^k}) =$$

- | | | | |
|------|--------------|-------------------------|-------------------------|
| A) 1 | B) $+\infty$ | C) $\frac{1}{1-\delta}$ | D) $\frac{1}{1+\delta}$ |
|------|--------------|-------------------------|-------------------------|

1/4



Exercice 2 :

Calculer les intégrales suivantes:

Q6. $\int_0^\pi e^t \cos 2t \, dt =$

A) $\frac{e^\pi}{5}$

B) $\frac{e^\pi+1}{5}$

C) $\frac{e^\pi-2}{5}$

D) $\frac{e^\pi-1}{5}$

Q7. $\int_0^\pi e^t \cos^2 t \, dt =$

A) $\frac{e^\pi-1}{5}$

B) $\frac{4(e^\pi+1)}{5}$

C) $\frac{3(e^\pi-1)}{5}$

D) $\frac{e^\pi+2}{5}$

Exercice 3:

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que : $\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$.

Q8. L'intégrale

$$\int_a^b t f(t) dt =$$

A) $\frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$

B) $\frac{a-b}{2} \int_a^b f(t) dt$

C) $\frac{a}{2} \int_a^b f(t) dt$

D) $\frac{b}{2} \int_a^b f(t) dt$

Q9. L'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt =$$

A) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

B) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

C) $\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

Q10. L'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{t \sin t}{3 + \cos^2 t} dt =$$

A) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

B) $\frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$

C) $\frac{\pi^3}{6\sqrt{3}}$

D) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$



Exercice 4:

On note $a = \frac{\sqrt[3]{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ et $\lambda = a + b$.

Q11. Le produit ab vaut

- | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------|
| A) $\frac{1}{3}$ | B) $\frac{2}{3}$ | C) $\frac{7}{3}$ | D) 1 |
|------------------|------------------|------------------|------|

Q12. λ est solution de l'équation

- | | | | |
|------------------------|------------------------|-------------------|------------------------|
| A) $x^3 - 7x - 36 = 0$ | B) $x^3 + 7x - 21 = 0$ | C) $x^3 - 7x = 0$ | D) $x^3 - 7x - 35 = 0$ |
|------------------------|------------------------|-------------------|------------------------|

Q13. La valeur de λ est alors

- | | | | |
|----------|-----------------|-------------------|------------------|
| A) nulle | B) un réel pair | C) un réel impair | D) $\lambda > 4$ |
|----------|-----------------|-------------------|------------------|

Exercice 5:

Un candidat se présentant à un concours, doit répondre d'une manière successive à une série de questions $(Q_n)_{n>0}$. L'épreuve est présentée en ligne et autre que Q_1 , l'accès à Q_n n'est possible que si le candidat donne une réponse à Q_{n-1} . On admet que:

- la probabilité de donner une bonne réponse à Q_1 est 0,1.
- pour $n > 1$;
 - si le candidat donne une bonne réponse à Q_{n-1} , la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est 0,8.
 - si le candidat donne une mauvaise réponse à Q_{n-1} , la probabilité de donner une bonne réponse à Q_n est 0,6.

On note pour tout entier naturel n non nul, B_n l'évènement "L'étudiant donne une bonne réponse à la question Q_n " et P_n la probabilité de B_n

Q14. La valeur de P_2 est :

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| A) 0,52 | B) 0,59 | C) 0,54 | D) 0,62 |
|---------|---------|---------|---------|

Q15. L'étudiant a répondu correctement à la deuxième question, la probabilité qu'il ait donné une mauvaise réponse à la première vaut

- | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| A) $\frac{27}{37}$ | B) $\frac{21}{37}$ | C) $\frac{27}{31}$ | D) $\frac{21}{31}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|

Q16. La probabilité que le candidat ait au moins une bonne réponse aux trois premières questions est

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| A) 0,856 | B) 0,865 | C) 0,685 | D) 0,585 |
|----------|----------|----------|----------|



Exercice 6:

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) ; unité graphique 1cm.
 Soit A le point d'affixe $3i$. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z , distinct de A ,
 associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i}$$

On dit que M est invariant si $M=M'$.

Q17. f admet deux points invariants B et C et on note z_B et z_C les affixes respectives. Montrer que la somme des parties imaginaires de z_B et z_C vaut

- | | | | |
|-------|------|------|-------|
| A) -6 | B) 6 | C) 5 | D) -5 |
|-------|------|------|-------|

On admet que B et C sont tels que $|\text{im}(z_B)| > |\text{im}(z_C)|$ et on appelle \mathcal{E} le cercle de diamètre $[BC]$.
 Soit M un point quelconque de \mathcal{E} différent de B et de C et M' son image par f

Q18. Il existe un réel θ tel que l'affixe z de M s'écrit

- | | | | |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| A) $3i - 4e^{i\theta}$ | B) $-3i - 4e^{i\theta}$ | C) $3i + 4e^{-i\theta}$ | D) $3i + 4e^{i\theta}$ |
|------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|

Q19. Il existe un réel θ tel que l'affixe z' de M' s'écrit

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| A) $3i - 4e^{-i\theta}$ | B) $-3i + 4e^{i\theta}$ | C) $-3i - 4e^{-i\theta}$ | D) $3i + 4e^{-i\theta}$ |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|

Q20. Le point M'

- | | | | |
|--|--|---------------------------------------|--|
| A) est à l'intérieur du cercle \mathcal{E} | B) est à l'extérieur du cercle \mathcal{E} | C) appartient au cercle \mathcal{E} | D) est le centre du cercle \mathcal{E} |
|--|--|---------------------------------------|--|

Correction du Concours d'entrée en 1^{ère} année du cycle préparatoire

Ecole Nationale Des Sciences Appliquées

2013-2014

Correction mathématique

Exercice 1 :

Q1 . Soit n un élément de \mathbb{N} , on a :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \\ &= \frac{u_n^2}{v_n^2} \\ &= x_n^2\end{aligned}$$

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $\forall x \in \mathbb{R}^+; f(x) = x^2$.

On a $f([0;1]) = [0;1]$ et $x_0 = \frac{\alpha}{\beta} \in]0;1[$.

Donc par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}; x_n \in [0;1]$.

Or $\forall x \in [0;1]; f(x) - x \leq 0$, alors la suite (x_n) est décroissante.

D'autre part, on a (x_n) est minorée par 0, donc elle est convergente.

On pose $l = \lim(x_n)$. On a $f(l) = l$ et $l \in [0;1]$.

On a $\forall x \in [0;1]; f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$, Or (x_n) est décroissante alors $l = 0$.

Autrement si $l = 1$ alors $l \leq x_0 < 1$. Absurde.

Q2 . Soit n un élément de \mathbb{N} , on a :

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\
 &= \frac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} \\
 &= u_n - v_n \\
 &= y_n
 \end{aligned}$$

Donc la suite (y_n) est constante, alors $\forall n \in \mathbb{N}; y_n = y_0 = \alpha - \beta$.

Ainsi $\lim(y_n) = \alpha - \beta$

Q3. On a $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = x_n v_n = x_n (u_n - y_n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}; u_n (x_n - 1) = x_n y_n$. Or $\forall n \in \mathbb{N}; x_n \leq x_0 < 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \frac{x_n y_n}{x_n - 1}$

Ainsi la suite (u_n) comme produit de suites convergentes et on a $\lim(u_n) = 0$

Q4. La suite (v_n) :

$\forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n - y_n$. Alors (v_n) convergente comme somme de suites convergentes. Et on a $\lim(v_n) = -\lim(y_n) = \beta - \alpha$

Q5.

Soit δ un élément de $]0, 1[$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{1-\delta} &= \frac{\delta}{1-\delta} + \frac{\delta}{1-\delta} \\
 \frac{\delta}{1-\delta} &= 0 \text{ et } \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{\delta}{1-\delta} = \frac{\delta}{1-\delta} \\
 \frac{\delta}{1-\delta} &= 1
 \end{aligned}$$

Donc $\frac{\delta}{1-\delta}$

Exercice 2

Q6. Calculons $\int_0^\pi e^t \cos(2t) dt$.

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = e^t \\ v'(t) = \cos(2t) \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(t) = e^t \\ v(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) \end{cases}$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt = \frac{1}{2} [e^t \sin(2t)]_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^t \sin(2t) dt$$

$$\text{De même } \int_0^\pi e^t \sin(2t) dt = -\frac{1}{2} [e^t \cos(2t)]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt$$

$$\text{Alors } \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt = \frac{1}{2} [e^t \cos(2t)]_0^\pi + \frac{1}{4} [e^t \sin(2t)]_0^\pi - \frac{1}{4} \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt$$

$$\text{D'où } \frac{5}{4} \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt = \frac{1}{2} [e^t \sin(2t)]_0^\pi + \frac{1}{4} [e^t \cos(2t)]_0^\pi = \frac{e^\pi - 1}{4}.$$

$$\text{Ainsi } \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt = \frac{e^\pi - 1}{5}$$

Q7 . On a $\forall t \in \mathbb{R}; \cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^t \cos^2(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (e^t + e^t \cos(2t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi e^t dt + \int_0^\pi e^t \cos(2t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^\pi - 1 + \frac{e^\pi - 1}{5} \right) \\ &= \frac{3(e^\pi - 1)}{5} \end{aligned}$$

Exercice 3

Q8 . f une fonction continue sur $[a, b]$ et telle que : $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

$$\text{On a } \int_a^b t f(t) dt = \int_a^b t f(a+b-t) dt$$

Posons $u = a+b-t$. Donc $du = -dt$

$$\begin{aligned}
\int_a^b tf(t)dt &= -\int_b^a (a+b-u)f(u)du \\
&= -\int_b^a (a+b)f(u)du + \int_b^a uf(u)du \\
&= (a+b)\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)dt
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_a^b tf(t)dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t)dt$$

Q9. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t} dt &= \frac{1}{3} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2} dt \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^\pi \frac{\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right)^2} dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^\pi \\
&= \frac{2 \arctan(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Q10. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $\forall t \in [0;1], f(t) = \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}$.

$$\text{On a } \forall t \in [0;1], f(\pi+0-t) = \frac{\sin(\pi-t)}{3+\cos^2(\pi-t)} = \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}$$

$$\text{donc } \forall t \in [0;1], f(\pi+0-t) = f(t)$$

Alors d'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{3 + \cos^2 t} dt &= \int_0^{\pi} t f(t) dt \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(t) dt \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Exercice 4

Q11. On a $a = \frac{\sqrt[3]{41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$ et $\lambda = a + b$.

On a $ab = \frac{\sqrt[3]{(41\sqrt{5} + 54\sqrt{3}) \times (54\sqrt{3} - 41\sqrt{5})}}{3} = \frac{\sqrt[3]{54^2 \times 3 - 41^2 \times 5}}{3} = \frac{7}{3}$

Q12. On a

$$\begin{aligned}
\lambda^3 - 7\lambda &= (a+b)^3 - 7(a+b) \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 7a - 7b \\
&= a^3 + 3a \times \frac{7}{3} + 3b \times \frac{7}{3} + b^3 - 7a - 7b \\
&= a^3 + b^3 \\
&= \frac{41\sqrt{5} + 54\sqrt{3} + 54\sqrt{3} - 41\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \\
&= 36
\end{aligned}$$

Donc $\lambda^3 - 7\lambda - 36 = 0$

Q13

- On a $0^3 - 7 \times 0 - 36 = -36$ alors $\lambda \neq 0$.
- donc λ est impaire

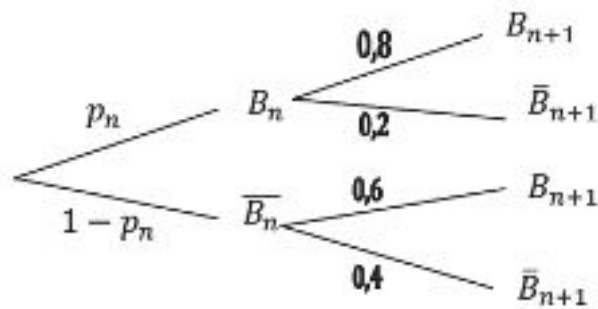
Exercice 5

Q14.

$$\begin{aligned}
 p_2 &= p\left(\frac{B_2}{B_1}\right) \times p(B_1) + p\left(\frac{B_2}{\bar{B}_1}\right) \times p(\bar{B}_1) \\
 &= 0,8 \times 0,1 + 0,6 \times 0,9 \\
 &= 0,62
 \end{aligned}$$

Q15. On à :

Avec,



Q16. D'après la question précédente on écrit :

Exercice 6

Q17. Soit $M(z)$ un point invariant par f , alors $f(M) = M$.

On a :

$$\begin{aligned}
 f(M) = M &\Leftrightarrow z = \frac{3iz - 7}{z - 3i} \\
 &\Leftrightarrow z^2 - 6iz + 7 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{On a } \Delta = (-6i)^2 - 28 = -64 = (8i)^2$$

Alors

$$f(M) = M \Leftrightarrow z = \frac{6i-8i}{2} \text{ ou } z = \frac{6i+8i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z = 7i$$

Donc $\text{Im}(z_B) + \text{Im}(z_C) = -1 + 7 = 6$.

Q18. On a $z_B = 7i$ et $z_C = -i$.

On a le cercle ε et de diamètre $R = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}|z_B - z_C| = 4$ et de centre $\Omega(3i)$.

Ainsi si $M(z) \in \varepsilon$ alors $\exists \theta \in \mathbb{R}, z = 3i + 4e^{i\theta}$ ou $z = 3i + 4e^{-i\theta}$.

Q19. On a

$$z' = \frac{3iz - 7}{z - 3i} = \frac{-9 + 12ie^{i\theta}}{4e^{i\theta}}$$
$$= \frac{1}{4}(12i - 16e^{-i\theta})$$
$$= 3i - 4e^{-i\theta}$$

Q20. On a

$$z' = 3i - 4e^{-i\theta}$$
$$= 3i + 4e^{i\pi} e^{-i\theta}$$
$$= 3i + 4e^{i(\pi-\theta)}$$
$$= 3i + 4e^{i\theta'} \quad (\theta' = \pi - \theta)$$

Alors $M' \in \varepsilon$

