Lycée qualifiant Al Fath Lqliâa

Inzegane-Ait-Melloul

Résumé du cours Fonctions Logarithmes

Prof. Mohamed SELLAH // 2BACSE

Définition :

La fonction Logarithme, est la fonction primitive de $x \to \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1. On note Ln ou bien Log.

Propriété 1 :

La fonction $x \to \ln(x)$ est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Propriété 2 :

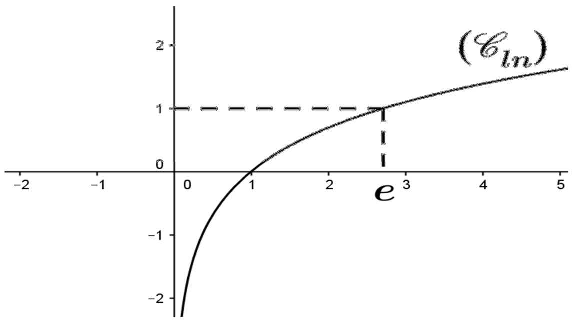
Pour tout a et b de $]0;+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a :

- ✓ $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$
- ✓ $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - l\,n(b)$
- ✓ $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -l\,n(a)$
- ✓ $ln(a^r) = r\,ln(a)$
- ✓ $ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\,ln(a)$

Propriété 3:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_*^{+2}$

- ✓ $ln(x) > ln(y) \Leftrightarrow x > y$
- ✓ $l\,n(x) = l\,n(y) \Leftrightarrow x = y$
- ✓ $ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- ✓ *Pour tout* $r \in \mathbb{Q}$: $ln(e^k) = k$
- ✓ $ln(x) = k \Leftrightarrow x = e^k$



Limites importantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \ ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \ ; \ \lim_{x\to 0^+} x^r \ln(x) = 0 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \left(r \in \mathbb{Q}_+^*\right)$$

Propriétés importantes :

$$lim f(x) = +\infty \ \Rightarrow \ lim\, ln\big(f(x)\big) = +\infty \ ;$$

$$lim f(x) = -\infty \ \Rightarrow \ lim\, ln|f(x)| = +\infty$$

$$\begin{cases} lim f(x) = 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \ lim\, ln\big(f(x)\big) = -\infty \ ;$$

$$\begin{cases} lim f(x) = l \\ l > 0 \end{cases} \Rightarrow \ lim\, ln\big(f(x)\big) = ln(l)$$

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, de fonction dérivée $\left(\ln\ (x)\ \right)' = \frac{1}{x}$, donc la fonction ln est **continue** et **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$. $\quad \left(\ln\ (u(x))\ \right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Logarithme de base a $(a \neq 1$ et $a > 0)$	
$(log_a)'(x) = \dfrac{1}{x ln(a)}$	$(\forall x > 0)\ log_a(x) = \dfrac{ln(x)}{ln(a)}$
$log_a(1) = 0$	$log_a(a) = 1$
$log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = -log_a(y)$	$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
$\forall r\epsilon\mathbb{Q}$: $log_a(x^r) = r log_a(x)$	$log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$

Logarithme décimal
$(\forall x > 0)\ log(x) = \dfrac{ln(x)}{ln(10)}$
$(\forall r\epsilon\mathbb{Q})$: $log(10^r) = r$

Prof. Mohamed SELLAH