Calcul intégral

EL KYAL MOHAMED

➢ Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$

L'intégrale de f de a à b est le nombre réel : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

➢ Propriétés :

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
Linéarité: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $(k \in \mathbb{R})$ $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	
Relation de Chasles: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	

➢ Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur segment $[a;b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

➢ Intégrale et ordre :

$$si \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq 0 \ , \ alors \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$si \quad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \geq g(x) \ , \ alors \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

➢ Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)\times v'(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx$$

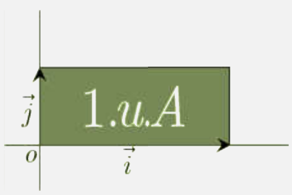
➢ Calcul d'aires :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(o,\vec{i},\vec{j})$

Soit I et J deux points tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

L'unité d'aire, notée $u.A$, est l'aire du rectangle bâti à partir des points O , I et J

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



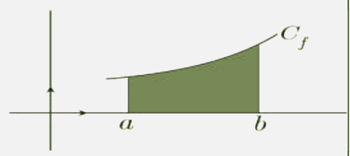
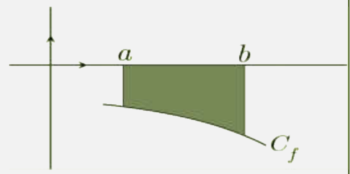
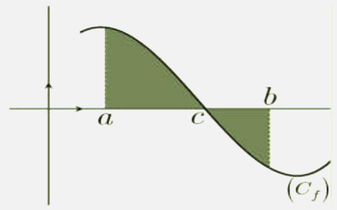
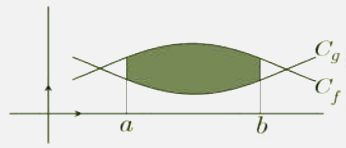
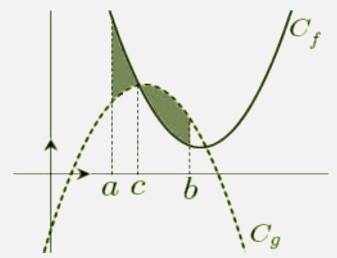
L'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left|\int_a^b \left|f\left(x\right)\right| dx\right| .u.A$$

L'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, $\left(C_g\right)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left|\int_a^b \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right| dx\right| .u.A$$

➢ ***Cas particuliers :***

Figure illustrative	Remarque	L'aire du domaine hachuré sur la figure
	f est positive sur $\left[a;b\right]$	$\left\|\int_a^b f\left(x\right) dx\right\| .u.A$
	f est négative sur $\left[a;b\right]$	$\left\|\int_a^b -f\left(x\right) dx\right\| .u.A$
	• f est positive sur $\left[a;c\right]$ • f est négative sur $\left[c;b\right]$	$\left\|\int_a^c f\left(x\right) dx + \int_c^b -f\left(x\right) dx\right\| .u.A$
	$\left(C_f\right)$ est au dessus de $\left(C_g\right)$ sur $\left[a;b\right]$	$\left\|\int_a^b \left(f\left(x\right) - g\left(x\right)\right) dx\right\| .u.A$
	• $\left(C_f\right)$ est au dessus de $\left(C_g\right)$ sur $\left[a;c\right]$ • $\left(C_f\right)$ est au dessous de $\left(C_g\right)$ sur $\left[c;b\right]$	$\left\|\int_a^c \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_c^b \left(g\left(x\right) - f\left(x\right)\right) dx\right\| .u.A$

➢ ***Calcul de volumes :***

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe $\left(C_f\right)$ sur $\left[a;b\right]$, un tour complet autour de l'axe des abscisses est:

$$V = \left|\int_a^b \pi\left(f\left(x\right)\right)^2 dx\right| u.v$$

$u.v$: unité de volume