

➤ **Axe de symétrie – Point de symétrie :**

La droite d'équation $x = a$ est un **axe de symétrie** de la courbe (C_f) si :

- $\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$

Le point $I(a, b)$ est un **point de symétrie** de la courbe (C_f) si :

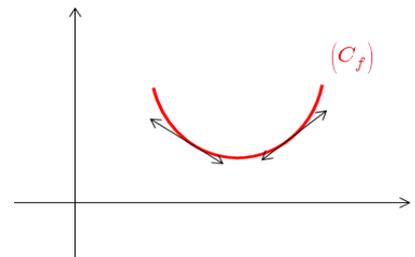
- $\forall x \in D_f \quad (2a - x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) + f(x) = 2b$

➤ **Concavité et point d'inflexion d'une courbe :**

Une fonction est **convexe** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes

Si $\forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$

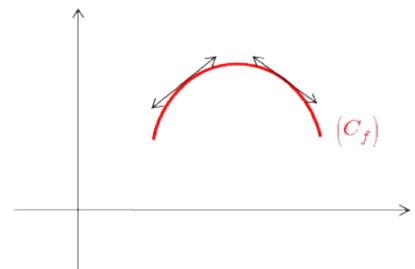
Alors la courbe (C_f) est convexe sur l'intervalle I



Une fonction est **concave** sur un intervalle si sa courbe représentative sur cet intervalle, est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes

Si $\forall x \in I \quad f''(x) \leq 0$

Alors la courbe (C_f) est concave sur l'intervalle I



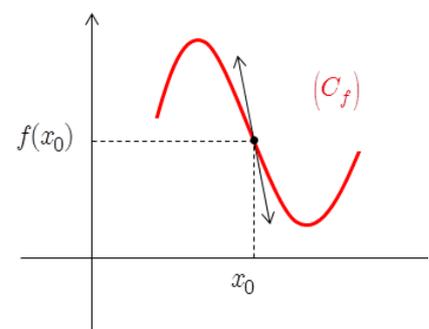
Un **point d'inflexion** d'une courbe (C_f) est le point où la courbe (C_f) change de concavité en ce point

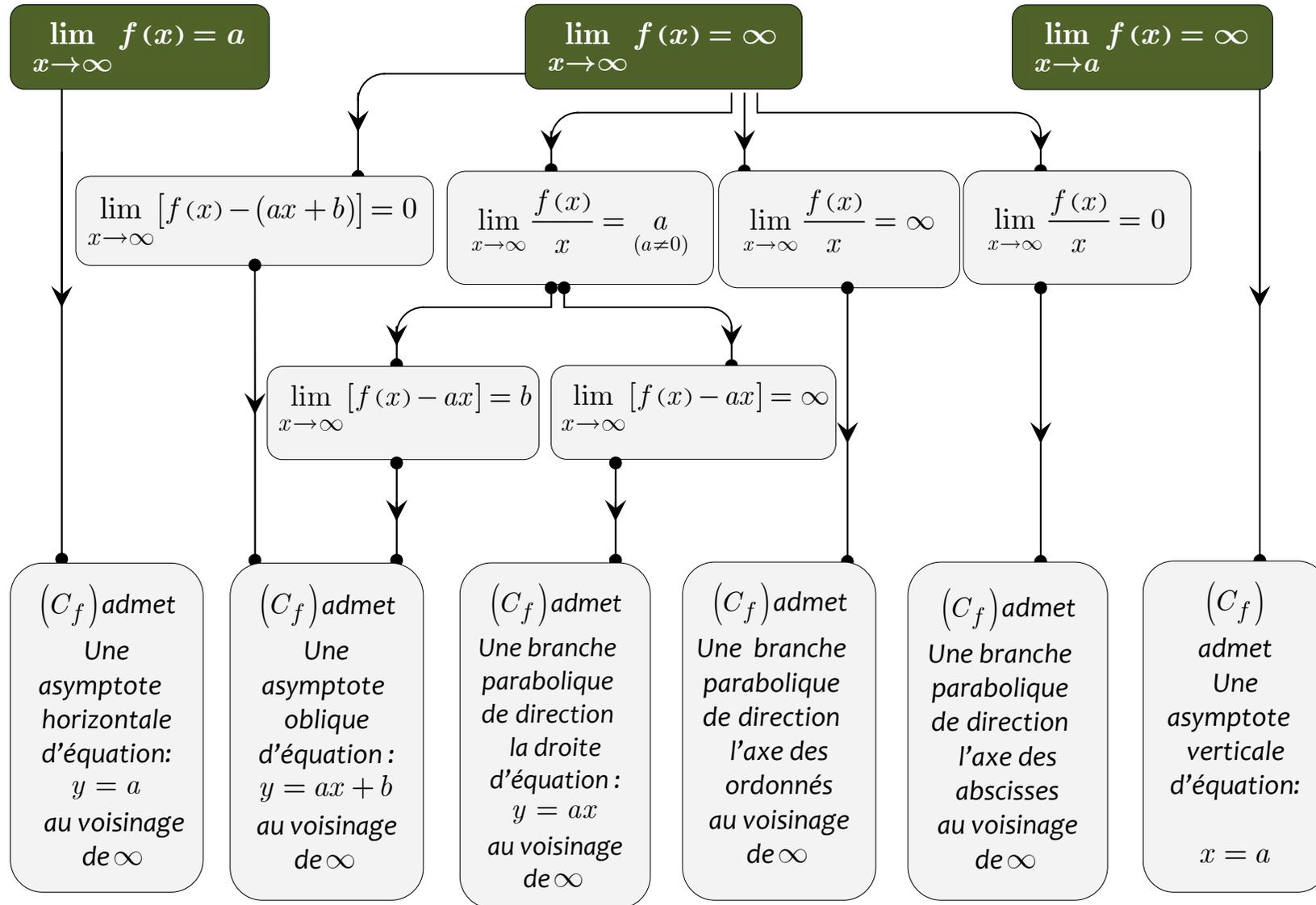
Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0

Alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0

Si f' s'annule sans changer de signe en x_0

Alors la courbe (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse x_0





➤ **Propriété :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
alors f admet **une fonction réciproque**, notée f^{-1} , définie sur l'intervalle $f(I)$

et on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

➤ **Détermination de l'expression de $f^{-1}(x)$:**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
Soit x un élément de $f(I)$ et y un élément de I tel que: $f^{-1}(x) = y$
On a : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ et en résolvant l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y
On déduit l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $f(I)$

➤ **Continuité de la fonction réciproque :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
alors une fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$

➤ **Dérivabilité de la fonction réciproque :**

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
soit x_0 un élément de I et $y_0 = f(x_0)$
si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0
et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

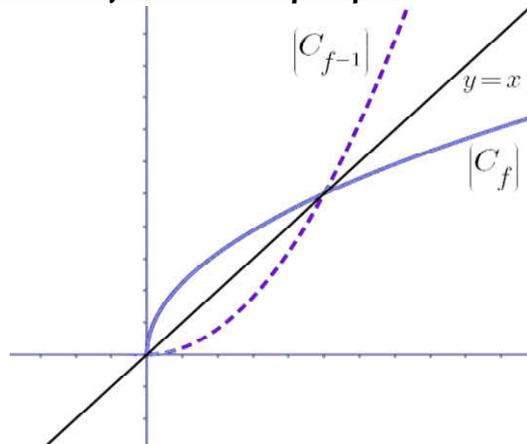
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I
alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

➤ **Monotonie de la fonction réciproque :**

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I
 Alors une fonction réciproque f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$
 et varie dans le même sens que f

➤ **La courbe représentative de la fonction réciproque :**



Dans un repère orthonormé $(C_{f^{-1}})$ est le symétrique de (C_f) par rapport à la première bissectrice du repère (droite d'équation: $y = x$)

➤ **Remarques:**

La courbe (C_f)	⇒	La courbe $(C_{f^{-1}})$
$A(a, b) \in (C_f)$		$A'(b, a) \in (C_{f^{-1}})$
admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$		admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$
admet une asymptote horizontale d'équation : $y = a$		admet une asymptote verticale d'équation : $x = a$
admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$		admet une asymptote oblique d'équation : $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (on détermine l'expression de y à partir de la relation: $x = ay + b$)
admet une tangente (ou demi-tangente) verticale		admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale
admet une tangente (ou demi-tangente) horizontale		admet une tangente (ou demi-tangente) verticale