

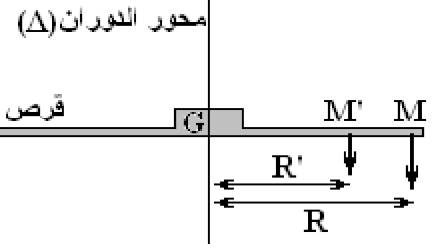
حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

1. الأفصول الزاوي- السرعة الزاوية- التسارع الزاوي:

دوران جسم صلب حول محور ثابت:

يكون جسم صلب، غير قابل للتشويه في حركة دوران حول محور ثابت Δ إذا كانت جميع نقطه لها حركة دائرية ممرزة على هذا المحور Δ (باستثناء النقط المنتمية للمحور Δ)

- مسار النقطتين M و M' دائريين ممرزين على محور الدوران (Δ)
استنتاج:



- جميع نقط القرص لها حركة دائرية ما عدا النقط الموجودة على المحور (Δ) التي توجد في حالة سكون.
- القرص له حركة دوران حول المحور (Δ)
- حين يدور الجسم بالزاوية ($\Delta\theta$) خلال المدة الزمنية (Δt) فإن جميع نقطه تدور بنفس الزاوية ($\Delta\theta$).

معلمة موضع المتحرك على المسار الدائري:

يمكن تحديد موضع نقطة متحركة في كل لحظة بالاعتماد على:

- الأفصول الزاوي (θ):

$$\theta = (\overline{Ox}, \overline{OM})$$

(θ): الزاوية بين متجهة الموضع \overline{OM} و محور الأفصول Ox

(θ): يعبر عنها بالراديان rad

- الأفصول المنحني (S):

$$S = \overline{AM}$$

هام:

العلاقة بين الأفصول (θ) الزاوي و الأفصول المنحني (S): $S = R \cdot \theta$

- إحداثيات ديكارت:

$$\overline{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

$x = R \cdot \cos(\theta)$: إحداثي متجهة الموضع على المحور Ox

$y = R \cdot \sin(\theta)$: إحداثي متجهة الموضع على المحور Oy

ملحوظة:

معادلة مسار دائري شعاعه R و إحداثيات مركزه في معلم ديكارت الزوج (a, b): $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

- معلم فريني (M, \vec{u}, \vec{n}):

$$\overline{OM} = -R \cdot \vec{n} + 0 \cdot \vec{u} = -R \cdot \vec{n}$$

السرعة الزاوية للجسم:

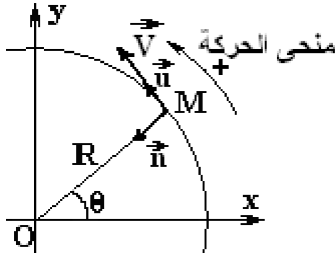
السرعة الزاوية هي المشتقة الأولى للأفصول الزاوي بالنسبة للزمن $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

ملحوظة:

- $\omega_i = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ و بالتالي: $\omega_i = \frac{\theta_{i+i} - \theta_{i-1}}{t_{i+i} - t_{i-1}} = \frac{\theta_{i+i} - \theta_{i-1}}{2 \cdot \tau}$: السرعة الزاوية اللحظية بالنقطة M_i تساوي السرعة المتوسطة بين الموضعين M_{i+1} و M_{i-1} الذين يوتران النقطة المعنية M_i .

السرعة اللحظية:

السرعة اللحظية \vec{V} دائما مماسة للمسار و موجهة في منحى الحركة



$$S=R.\theta \quad \text{و} \quad V = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dR.\theta}{dt} = R.\frac{d\theta}{dt} = R.\dot{\theta}$$

و بالتالي: $V = R.\dot{\theta}$

$$m.s^{-1} \text{ : السرعة الخطية و وحدتها}$$

$$\text{rad}.s^{-1} \text{ : السرعة الزاوية و وحدتها}$$

ملحوظة:

- $V=R.\omega$: جميع النقط لها نفس السرعة الزاوية لكنها تختلف في سرعاتها الخطية.
- $V=C^{te}$ و $R=C^{te}$: جميع النقط المتواجدة على نفس الدائرة لها نفس السرعة الخطية

التسارع الزاوي:

أ. تعريف:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

التسارع الزاوي للجسم الصلب هو المشتقة الأولى للسرعة الزاوية بالنسبة للزمن

ملحوظة:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2.\tau}$$

و بالتالي: $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}_i}{dt}$

ب. التسارع المماسي و المنظمي:

$$\vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$$

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{dR.\dot{\theta}}{dt} = R.\frac{d\dot{\theta}}{dt} = R.\ddot{\theta}$$

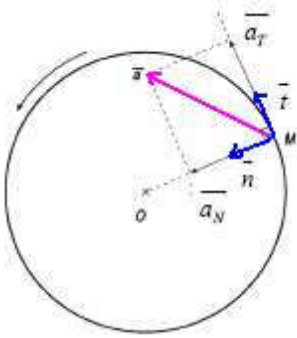
التسارع المماسي

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

و وحدته $\text{rad}.s^{-2}$

$$a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{(R.\dot{\theta})^2}{R} = R.\dot{\theta}^2$$

التسارع المنظمي



2. العلاقة الأساسية للديناميك بالنسبة لجسم صلب في دوران:

نص العلاقة:

في معلم مرتبط بالأرض و بالنسبة لمحور ثابت Δ

$$\sum M(\vec{F}/\Delta) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

$$\sum M(\vec{F}/\Delta) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

مجموع عزم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت

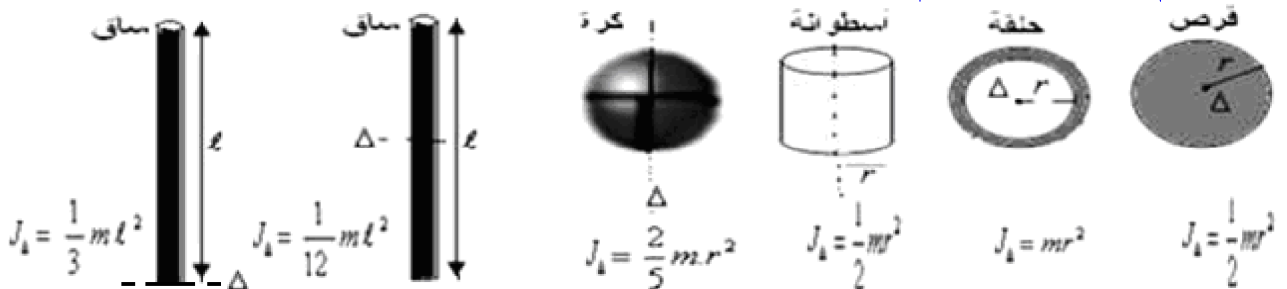
$$J_{\Delta} : \text{عزم القصور الجسم الصلب بالنسبة لمحور الدوران و وحدته } \text{Kg}.m^2$$

$$\ddot{\theta} : \text{التسارع الزاوي و وحدته } \text{rad}.s^{-2}$$

نص العلاقة:

في معلم مرتبط بالأرض مجموع عزم القوى المطبقة على جسم في دوران حول محور ثابت يساوي في كل لحظة جداء عزم قصور J_{Δ} الجسم بالنسبة لنفس المحور و التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$.

تعبير عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة:



3. تطبيقات:

تطبيق 1:

نستعمل منضدة هوائية و ننجز التركيب التالي:



ندير القرص حول محور دورانه Δ فنصل على التسجيل التالي:

$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$$

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau}$$

$$\tau = 40ms$$

نتخذ المحور Ox المار من النقطة M_0 محورا مرجعا للأفاصيل الزاوية و لحظة تسجيل M_0 أصلا لمعلم الزمن

الموضع	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
التاريخ $t_i(s)$							
$\theta(rad)$							
$\dot{\theta}(rad/s)$							
$\ddot{\theta}(rad/s^2)$							
$\sum M_{(\bar{F}/\Delta)}$							
$\frac{\sum M_{(\bar{F}/\Delta)}{\ddot{\theta}}$							

بمعرفة صلابة النابض و طولها الأصلي نحصل على توتره في كل لحظة: $T_i = K(l_i - l_0)$ مع $l_i = AB$

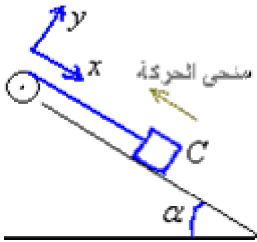
تطبيق 2:

نعتبر مجموعة ميكانيكية مكونة من:

- بكرة متجانسة D شعاعها r و كتلتها m_0 مقابلة للدوران حول محورها الأفقي و الثابت،
- جسم صلب C كتلته m موضوع فوق مستوى مائل بزاوية α .
- خيط f غير قابل للامتداد ملفوف حول مجرى البكرة و طرفه الآخر مثبت بالجسم C

نحرر المجموعة فينزل الجسم C نحو الأسفل (نعتبر الاحتكاكات مهملة)

بنطبق العلاقة الأساسية للديناميك على الجسم C ثم على البكرة أوجد تعبير تسارع المجموعة بدلالة α و g و m_0 و m



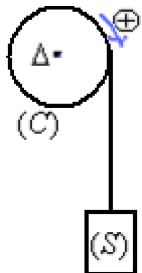
تطبيق 3:

نعتبر أسطوانة C متجانسة ذات كتلة $m_C = 2Kg$ ، شعاعها $r = 10cm$ قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي Δ يمر من مركزها.

نعلق في طرف خيط غير قابل للشد و ملفوف حول الأسطوانة جسما صلبا S كتلته $m_S = 1Kg$ ، نحرك المجموعة بدون سرعة بدئية، القيمة المطلقة لعزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك و المطبقة على محور الأسطوانة

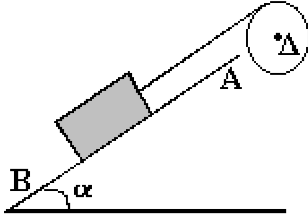
$$M_C = 0.38N.m$$

1. أوجد تعبير التسارع الزاوي للأسطوانة بدلالة M_C و r و J_Δ عزم قصور الأسطوانة و T_C شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على C .
2. حدد طبيعة حركة الجسم S .
3. أحسب قيمة تسارع الجسم S ثم استنتج قيمة التسارع الزاوي للأسطوانة



تمرين 6 :

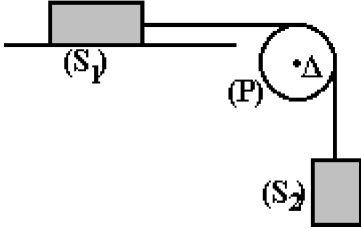
نعتبر جسما صلبا (S) كتلته $m=0,5\text{kg}$ ومركز قصوره G ، يمكن أن ينزلق بدون احتكاك فوق مستوى مائل بزاوية $\alpha=30^\circ$ بالنسبة للمستوى الأفقي. نأخذ $g=10\text{m.s}^{-2}$



الجسم (S) مثبت بالطرف الأسفل لحبل (f) ملفوف حول مجرى بكرة متجانسة شعاعها $r=5\text{cm}$ ، تدور حول محور أفقي وثابت (Δ). نطلق الجسم (S) من النقطة A بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t=0\text{s}$ ، فينزلق فوق المستوى المائل مسببا دوران البكرة دون انزلاق الخيط (f) على مجراها. يطبق الخيط (f) على الجسم (S) خلال الحركة قوة ثابتة شدتها $F=2\text{N}$.

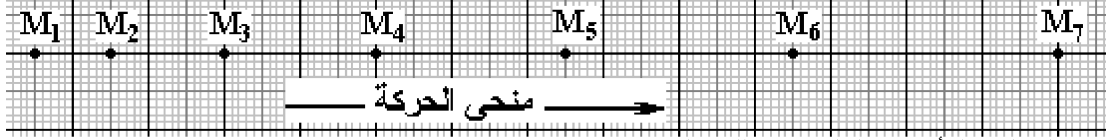
1. بتطبيق مبرهنة مركز القصور على (S) بين أن قيمة التسارع $a_G=1\text{m.s}^{-2}$.
1. أوجد دالة السرعة V_G .
2. أحسب السرعة بالنقطة B علما أن المسافة AB تساوي 2m .
3. أحسب المدة التي تستغرقها حركة (S) ما بين الموضعين A و B.

تمرين 7 :



يمكن لجسم صلب (S_1) ، كتلته $m_1=0,5\text{kg}$ ، أن ينزلق على منضدة أفقية. يتصل الجسم (S_1) بجسم (S_2) ، كتلته $m_2=1\text{kg}$ ، بواسطة خيط (غير قابل للامتداد وكتلته مهملة) يمر في مجرى بكرة (P) كتلتها $m=0,5\text{kg}$ وشعاعها r ، قابلة للدوران بدون احتكاك حول محورها (Δ). الخيط لا ينزلق في مجرى البكرة. وعزم قصور البكرة بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta=\frac{1}{2} m r^2$.

نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية و نسجل حركة إحدى نقط الجسم (S_1) في مدد زمنية متتالية ومتساوية $\tau=50\text{ms}$.



1. اعتمادا على التسجيل أوجد قيمة التسارع a للحركة.
2. بتطبيق مبرهنة مركز القصور أحسب: T_2 شدة القوة المقرونة بتأثير الخيط على (S_2). T_1 : شدة القوة المقرونة بتأثير الخيط على (S_1). قيمة معامل الاحتكاك $\tan\varphi$ بين الجسم الصلب (S_1) والمنضدة.
3. أكتب المعادلة الزمنية لحركة الجسم (S_1). نأخذ أصل التواريخ عند لحظة تسجيل النقطة M_3 وأصل الأفاصل عند النقطة M_1 . استنتج تعبير سرعة الجسم (S_1) بدلالة الزمن.
4. أحسب تغير الطاقة الحركية بين الموضعين M_5 و M_1 .
5. بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية، أحسب شغل القوة المقرونة بتأثير المنضدة على الجسم (S_1) بين M_5 و M_1 .

2.2. الحركة الدائرية المنتظمة:

2.2.1. تعريف:

حركة دائرية منتظمة : حركة يبقى خلالها منظم متجهة السرعة ثابت

$$V = \|\vec{V}\| = C^{te}$$

هام :

- شدةها V ثابتة
- متجهة السرعة \vec{V} : متغيرة من منحاها و اتجاهها أثناء الحركة و بالتالي ليست بمتجهة ثابتة

2.2.2. معادلات الحركة :

الحركة الدائرية المنتظمة :

* منظم متجهة السرعة ثابت $V=C^{te}$

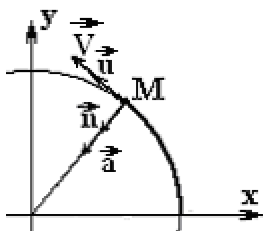
$$* \omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{R}$$

$$* \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$$

$$* a_T = R \cdot \dot{\omega}$$

$$* a_N = R \cdot \dot{\omega}^2 = R \cdot \omega^2$$

- انجاذبية و مركزية و شعاعية
- متجهها ثابت



2.2.3. المعادلة الزمنية:

• الأفصول الزاوي:

$$\theta = \omega.t + \theta_0 \quad \text{و بالتالي} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = C^{te}$$

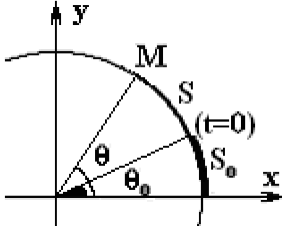
θ_0 : الأفصول الزاوي عند أصل التواريخ ($t=0s$)

• الأفصول المنحني:

$$S = R.\theta$$

$$S = R.(\omega.t + \theta_0) = R.\omega.t + R.\theta_0 = V.t + S_0$$

S_0 : الأفصول المنحني عند أصل التواريخ ($t=0s$)



هام:

الدور T المدة الزمنية اللازمة لإنجاز دورة كاملة (2π)

$$\omega = \frac{2.\pi}{T}$$

2.3. الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام:

• تعريف:

حركة دائرية متغيرة بانتظام: حركة تبقى خلالها قيمة التسارع الزاوي ثابتة

$$\ddot{\theta} = C^{te}$$

• معادلات الحركة:

الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام: * $\ddot{\theta} = C^{te}$: التسارع الزاوي ثابت

* $\omega = \dot{\theta} = \ddot{\theta}.t + \theta_0$: السرعة الزاوية تتغير مع مرور الزمن

* $a_T = R.\ddot{\theta}$: التسارع المماسي ثابت

* $a_N = R.\dot{\theta}^2$: التسارع المنظمي يتغير مع مرور الزمن

* المعادلة الزمنية: $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \dot{\theta}_0.t + \theta_0 = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \omega_0.t + \theta_0$

هام:

θ_0 و ω_0 : يشكلان على التوالي الأفصول الزاوي و السرعة الزاوية عند أصل التواريخ $t=0s$