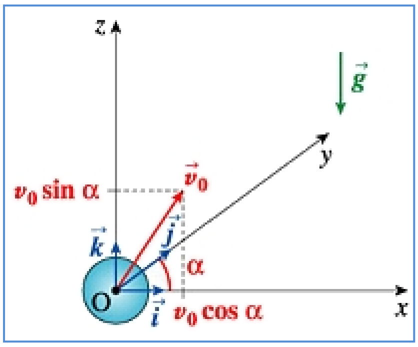
2- الحركات المستوية :

2-1- حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم :

نسمي **قذيفة** كل جسم يُرسل على مقربة من الأرض بسرعة بدئية $\vec{v}_0$.
لتبسيط الدراسة ، **نُهمل جميع الاحتكاكات** ونعتبر **القذيفة خاضعة لوزنها فقط** (سقوط حر) .

في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، نرسل من نقطة O جسما صلبا (S) كتلته m بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ تكون زاوية α مع الأفقي . نعتبر مجال الثقالة منتظما .



2-1-1- المعادلات التفاضلية :

المجموعة المدروسة : { **الجسم (S)** } وتتم دراسة الحركة في المعلم المتعامد الممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .

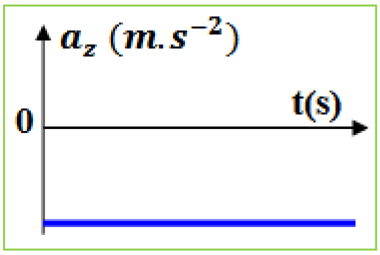
جرد القوى : وزنها $\vec{P}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{g} = m.\vec{a}_G$

أي $\vec{a}_G = \vec{g}$ حيث في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا : $\vec{g}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$

أثناء السقوط الرأسي الحر لقذيفة بسرعة بدئية غير رأسية ، تكون $\vec{a}_G = \vec{g}$.

نسقط العلاقة المتجهية في $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فنجد $\vec{a}_G(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$



المعادلات التفاضلية للحركة

نستنتج أن اتجاه متجهة التسارع $\vec{a}_G$ رأسي ومنحاها نحو الأسفل ومنظمها هو

$$a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_z| = g$$

2-1-2- حل المعادلات التفاضلية :

الشروط البدئية عند اللحظة $t = 0$: $\overrightarrow{OG}_0\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$ و $\vec{v}_{G0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{cases}$

ونعلم أن $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}$ إذن : $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = -g \end{cases}$ وهي تمثل **المعادلات التفاضلية للحركة** .

و **بعملية التكامل** نحصل على :

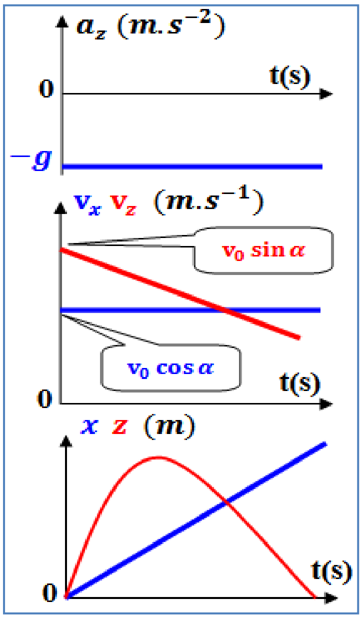
$$\vec{v}_G(t)\begin{cases} v_x(t) = C_1 = v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = C_2 = v_{0y} = 0 \\ v_z(t) = -gt + C_3 = -gt + v_{0z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

وهي تمثل **المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة** .

ونعلم أن $\vec{v}_G(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ إذن :
$$\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}(t)\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y(t) = 0 \\ \dfrac{dz}{dt} = v_z(t) = -gt + v_0\sin\alpha\end{cases}$$

وبعملية **التكامل** نحصل على :
$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases}x(t) = v_0\cos\alpha\, t + C_4 = v_0\cos\alpha\, t \\ y(t) = C_5 = y_0 = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\, t + C_6 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\, t\end{cases}$$

وهي تمثل **المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع** .

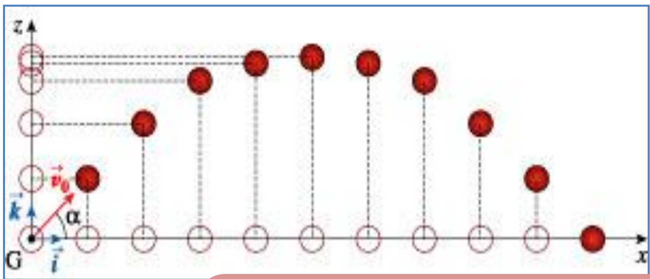


- بما أن $y(t) = 0$ فإن الحركة مستوية وتتم في المستوى الرأسي $(G, \vec{v}_0, \vec{g})$.
- $x(t)$ دالة خطية ، إذن ، على المحور $(O,\vec{i})$ الحركة مستقيمية منتظمة .
- $z(t)$ دالة من الدرجة الثانية ، إذن ، على المحور $(O,\vec{k})$ الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

2-1-3- مسار مركز القصور :

2-1-3-1- معادلة المسار :

للحصول على معادلة المسار يجب إيجاد تعبير z بدلالة x وذلك بإقصاء الزمن .



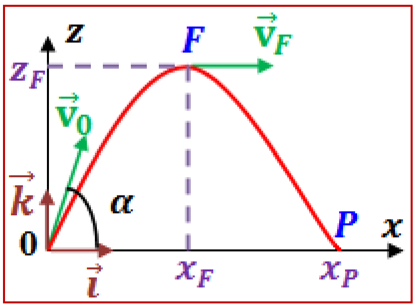
لدينا $x(t) = (v_0\cos\alpha)t$ أي $t = \dfrac{x(t)}{v_0\cos\alpha}$

نعوض تعبير t في المعادلة الزمنية لـ z فنجد :
$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + (v_0\sin\alpha)\frac{x}{v_0\cos\alpha}$$

إذن $z(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$

$z(x)$ دالة من الدرجة الثانية ، أي تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم ينتمي إلى مستوى القذف . إذن ، الحركة شلجمية .

2-1-3-2- قمة المسار :



$sin\, 2\alpha = 2\, sin\,\alpha\, cos\,\alpha$

قمة المسار F هي أعلى نقطة يصل إليها مركز قصور القذيفة .

عند قمة المسار F تكون $\vec{v}_z$ أفقية ، وبالتالي $v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0$

أي $-t_F + v_0\sin\alpha = 0$ إذن $t_F = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$

وهكذا نجد إحداثيات F هي : $x_F = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$ و $z_F = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$

ملحوظة : نحصل على أقصى قيمة لقمة المسار في حالة إرسال القذيفة رأسيا نحو الأعلى (أي $\alpha = \frac{\pi}{2}$) .

2-1-3-3- المدى :

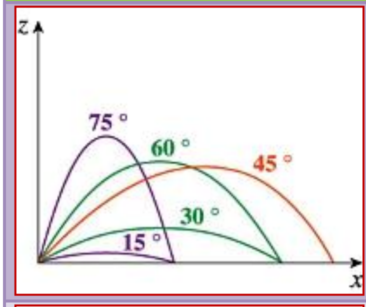
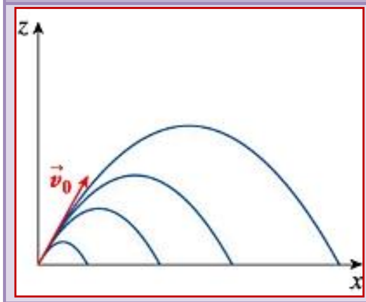
المدى هو المسافة بين الموضع G_0 لمركز قصور القذيفة لحظة انطلاقها والموضع P للنقطة G أثناء سقوط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل G_0 .

لدينا $z_P = 0$ أي $\left(-\frac{g}{2{v_0}^2\cos\alpha^2}x_P + \tan\alpha\right)x_P = 0$ إذن حلا هذه المعادلة هما :

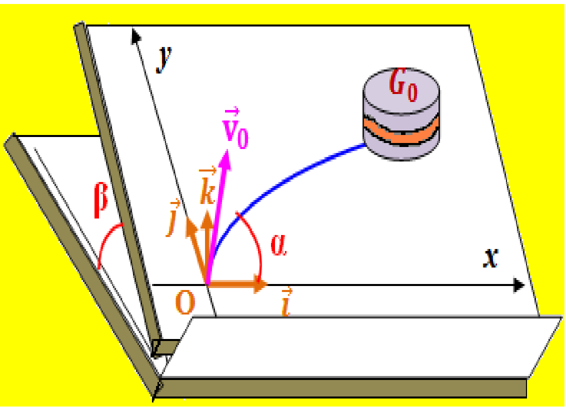
إما $z_P = 0$ أو $x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ (نلاحظ أن $x_P = 2.x_F$) .

بالنسبة لقيمة v_0 يكون المدى أقصى إذا كان $\sin 2\alpha = 0$ (أي $\alpha = 45°$) بحيث $x_{P_{max}} = \frac{{v_0}^2}{g}$.

ملحوظة : من خلال العلاقتين $z_F = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ و $x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ يتبين لنا :

	الملاحظات	المنحنى
بالنسبة لقيمة ثابتة للسرعة البدئية v_0	■ يتزايد المدى عندما تكبر α بين $[0°;45°[$ ■ يتناقص المدى عندما تكبر α بين $]45°;90°]$ ■ يأخذ المدى قيمة قصوى عند $\alpha = 45°$ ■ يكون للمدى القيمة نفسها بالنسبة لزاويتين متكاملتين $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ■ يزداد z_F أنسوب قمة المسار بزيادة α	
بالنسبة لقيمة ثابتة لزاوية القذف α	يزداد المدى و أنسوب قمة المسار كلما زادت قيمة السرعة البدئية v_0	

2-2- حركة جسم صلب على مستوى مائل :



في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، نرسل حاملا ذاتيا كتلته m فوق منضدة مائل بزاوية β عن الخط الأفقي بسرعة بدئية تكوّن زاوية α مع الحافة السفلى للمنضدة . نهمل جميع الاحتكاكات .

2-2-1- المعادلات التفاضلية :

المجموعة المدروسة : { الحامل الذاتي } وتتم دراسة الحركة في المعلم المتعامد الممنظم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .

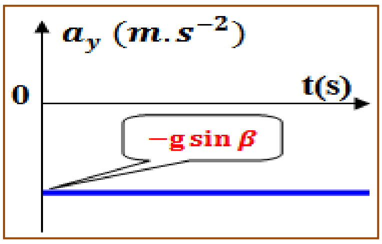
جرد القوى : وزنه $\vec{P}$ و تأثير المنضدة $\vec{R}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}_G$

في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا : $\vec{P}\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg\sin\beta \\ P_z = -mg\cos\beta \end{cases}$ و $\vec{R}\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = R_N \end{cases}$

$$\vec{a}_G(t)\begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t)0 \\ a_z(t)=0 \end{cases}$$ ($a_z=0$ لأن حركة الحامل الذاتي تتم على المستوى (oxy)) .

نسقط العلاقة المتجهية في $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فنجد $\begin{cases} P_x+R_x=ma_x \\ P_y+R_y=ma_y \\ P_z+R_z=ma_z \end{cases}$ أي $\begin{cases} ma_x=0 \\ ma_y=-mg\sin\beta \\ ma_z=R_N-mg\cos\beta=0 \end{cases}$



وبالتالي **المعادلات التفاضلية للحركة** هي : $\vec{a}_G(t)\begin{cases} a_x(t)=0 \\ a_y(t)=-g\sin\beta \\ a_z(t)=0 \end{cases}$

التسارع ثابت $a_G=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=|a_y|=g\sin\beta=cte$

2-2-2- حل المعادلات التفاضلية :

الشروط البدئية عند اللحظة $t=0$: $\overrightarrow{OG}_0\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \\ z_0=0 \end{cases}$ و $\vec{v}_{G0}\begin{cases} v_{0x}=v_0\cos\alpha \\ v_{0y}=v_0\sin\alpha \\ v_{0z}=0 \end{cases}$

ونعلم أن $\vec{a}_G=\frac{d\vec{v}}{dt}$ إذن : $\frac{d\vec{v}}{dt}(t)\begin{cases} \frac{dv_x}{dt}=a_x(t)=0 \\ \frac{dv_y}{dt}=a_y(t)=-g\sin\beta \\ \frac{dv_z}{dt}=a_z(t)=0 \end{cases}$ و هي تمثل **المعادلات التفاضلية للحركة** .

و **بعملية التكامل** نحصل على: $\vec{v}_G(t)\begin{cases} v_x(t)=C_1=v_{0x}=v_0\cos\alpha \\ v_y(t)=-(g\sin\beta)t+C_2=-(g\sin\beta)t+v_0\sin\alpha \\ v_z(t)=C_3=v_{0z}=0 \end{cases}$

و هي تمثل **المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة** .

ونعلم أن $\vec{v}_G(t)=\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ إذن : $\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}(t)\begin{cases} \frac{dx}{dt}=v_x(t)=v_0\cos\alpha \\ \frac{dy}{dt}=v_y(t)=-(g\sin\beta)t+v_0\sin\alpha \\ \frac{dz}{dt}=v_z(t)=0 \end{cases}$

و**بعملية التكامل** نحصل على : $\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t)=(v_0\cos\alpha)t+C_4=(v_0\cos\alpha)t \\ y(t)=-\frac{1}{2}(g\sin\beta)t^2+(v_0\sin\alpha)t \\ z(t)=C_6=z_0=0 \end{cases}$

و هي تمثل **المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع** .

- بما أن $z(t)=0$ فإن الحركة مستوية وتتم في المستوى المائل $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- $x(t)$ دالة خطية ، إذن ، على المحور $(O,\vec{i})$ الحركة مستقيمية منتظمة .
- $y(t)$ دالة من الدرجة الثانية ، إذن ، على المحور $(O,\vec{j})$ الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام .
- معادلة المسار : $y(x)=-\frac{g\sin\beta}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2+(\tan\alpha)x$