

I. Fonction logarithme népérien**1) Définition :**

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0; +\infty[$. elle admet donc des primitives sur cet intervalle

On appelle fonction logarithme népérien qu'on note \ln , la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 .

Conséquences :

- La fonction \ln est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$; sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\forall x \in]0; +\infty[; (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- $\ln(1) = 0$

2) Première propriété de la fonction \ln

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Donc la fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Conséquences

Pour tous réels strictement positifs a et b , on a : $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

Pour tout $x > 1$, on a $\ln x > 0$ et pour tout $0 < x < 1$, on a $\ln x < 0$

Exercice 1 :

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\ln(3-x) < 0$

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de définition de f et calculer sa dérivée

$$f(x) = \ln(x+4) \quad ; \quad f(x) = \ln x + 4 \quad ; \quad f(x) = \ln(x^2 + 4) \quad ;$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+4}\right) \quad ; \quad f(x) = \ln|x+4|$$

Propriétés :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors :

- $\forall x \in I : (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

- Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ s'écrivent sous la forme :

$$x \mapsto \ln|u(x)| + c \quad / \quad c \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Déterminer toutes les primitives de la fonction f sur \mathbb{R}

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

- Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$
- En déduire toutes les primitives de f sur $] -1; 1[$
- Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie $F(0) = 1$

Exercice 5 :

Dans chacun des cas suivants, donner un intervalle sur lequel f a des primitives, et donner une primitive de f

$$f(x) = \frac{2}{2x-3} ; f(x) = \frac{2x}{x^2+1} ; f(x) = \frac{\ln x}{x} ; f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

3) Relations importantes**Propriétés**

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$$

avec a_1, a_2, \dots et a_n sont des réels strictement positifs

$$\ln(a^n) = n \ln a, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z}$$

$$\forall r \in \mathbb{Q}; \ln(a^r) = r \ln a. \text{ en cas particulier } \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

Exercice 6 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln 2 + \ln \frac{1}{2} ; \ln 2 + \ln 4 - \ln 8 ; \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 2 \ln \sqrt{3} ; \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3})$$

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$

Etudier le signe de $f(x)$.

4) Etude de la fonction \ln

- Théorème admis:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

- $\forall x \in]1; +\infty[$ $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

- Le nombre e :**

La fonction \ln est continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\ln(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[$

Donc l'équation $\ln x = 1$ admet une seule solution dans $]0; +\infty[$ qu'on note e :

$$e \approx 2,7182818285\dots$$

e est un nombre irrationnel et $\ln e = 1$

Remarque:

Les valeurs approchées $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 3 \approx 1,1$ sont à connaître.

La tangente à la courbe de la fonction \ln au point d'abscisse 1 est $(T): y = x - 1$

La tangente au point d'abscisse e a pour équation : $y = \frac{1}{e}x$

- Tableau de variation:

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			+	
$\ln(x)$	 $-\infty$		0	1 $\rightarrow +\infty$

- Courbe représentative:

**Exercice 8 :**

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

$$\ln x \leq 1 \quad ; \quad \ln x = 2 \quad ; \quad 3 - \ln x \leq 8 \quad ; \quad \ln(2x+1) = 1$$

$$\ln(x^2) = -1 \quad ; \quad \ln(x(x+1)) = 0 \quad ; \quad \ln x + \ln(x+1) = 0$$

5) Propriétés

La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$. En particulier, en 1.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (\text{on pose } h = 1+x)$$

Exercice 9 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} - \ln x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{3 + 2x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x}$$

Exercice 10 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3 \ln x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \quad ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x-1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \ln(x^2 - x))$$

Théorème

Pour tout entier naturel non nul n , on a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x = 0$$

II. Etude et représentation de fonctions composées**Exercice 11 :**

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. En déduire les asymptotes à sa courbe (C_f)

Dresser le tableau de variation de f

Tracer (C_f) ainsi que sa tangente au point d'abscisse e

Exercice 12 :

Dans tous les cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f :

$$\text{a) } f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad , \text{ b) } \begin{cases} f(x) = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad , \text{ c) } f(x) = \ln|x^2 - 3x + 2|$$

III. Fonction logarithme de base a **1. Définition**

Soit a un réel strictement positif et différent de 1

La fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$ s'appelle fonction logarithme de base a . Notée: \log_a

2. Remarque :

La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e . En fait :

$$\forall x \in]0; +\infty[; \log_e(x) = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} ; \log_a(a) = 1$$

$$\text{Et } \forall r \in \mathbb{Q} ; \log_a(a^r) = r$$

3. Propriétés:

soit a un réel strictement positif et différent de 1

Pour tout x et y de \mathbb{R}_+^* et pour tout r de \mathbb{Q} , on a :

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad , \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad , \quad (x^r) = r \log_a(x)$$

4. Etude de la fonction \log_a

Dérivée de la fonction \log_a

$$\forall x \in]0; +\infty[: [\log_a(x)]' = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

Tableau de variation

Courbe représentative

5. Cas particulier : Fonction logarithme décimal**Définition**

La fonction logarithme de base 10, s'appelle fonction logarithme décimal notée \log

Remarques

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \log x = \log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10} \quad \frac{1}{\ln 10} \approx 0,434$$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \log 10^m = m$$

Exercice 11:

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\text{Log}(n-2) + \text{Log}(n+3) = 2$

2. Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système :
$$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$