I. دالة أصلية لدالة عددية:

01. تقديم دالة أصلية لدالة :

a. نشاط: لنعتبر الدالة : $f(x)=4x^2-5x+3$.

1) هل توجد دالة $F(x)$ تحقق ما يلي $F'(x)=f(x)$ على $\mathbb{R}$ ؟

2) إذا كان الجواب بنعم أكتب صيغة الدالة $F(x)$.

b. مفردات:

كل دالة $F(x)$ تحقق $F'(x)=f(x)$ تسمى دالة أصلية للدالة $f(x)$

c. تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I . نقول إن دالة F هي
دالة أصلية للدالة f على I اذا كانت F قابلة للاشتقاق على I و $\forall x\in I: F'(x)=f(x)$

1. أمثلة :

1) دالة أصلية للدالة $f(x)=4x+2$ على $\mathbb{R}$ هي $F(x)=2x^2+2x$

2) دالة أصلية للدالة $f(x)=\cos x$ على $\mathbb{R}$ هي $F(x)=\sin x$

02. تحديد جميع الدوال الأصلية لدالة f :

نشاط: دالة أصلية للدالة $f:x\to 2x+3$ على $\mathbb{R}$ هي $F:x\to x^2+3x$.
هل هناك دالة أخرى $G(x)$ حيث G دالة أصلية للدالة f ؟

2. خاصية :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I .
مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال التي هي على شكل: $F(x)+c$ مع $c\in\mathbb{R}$

3. مثال:

نعتبر الدالة $f(x)=10x-2$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

1) هل الدالة : $F(x)=5x^2-2x+3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=10x-2$ على $\mathbb{R}$.

2) حدد جميع الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

03. الدالة الأصلية $G(x)$ حيث: $G(x_0)=y_0$.

1. نشاط: لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب: $f(x)=2x+3$.

1) حدد الدوال الأصلية ل f :

2) حدد دوال الأصلية G ل f (إذا كان ممكن) حيث $G(1)=7$.

3) كم من دالة تحقق ذلك ؟

2. خاصية

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I . ليكن x_0 من I و y_0 و $\mathbb{R}$.
توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على المجال I حيث: $G(x_0)=y_0$.

d. مثال: نحدد الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ حيث $f(x)=x^3-2x+3$ و التي تأخذ القيمة -7 عند 0.

04. الاتصال و الدوال الأصلية:

1. خاصية :

كل دالة متصلة f على مجال I تقبل دالة أصلية F على I.

2. أمثلة :

مثال 1: كل دالة حدودية تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$. مثال 2: كل دالة جذرية تقبل دالة أصلية على مجموعة تعريفها .

مثال 3: $f(x)=\sqrt{x}$ تقبل دالة أصلية على $]0,+\infty[$.

05. دالة أصلية: لمجموع دالتين - جداء دالة في عدد حقيقي α

1. نشاط:

F دالة أصلية للدالة f على I. G دالة أصلية للدالة g على I.

1) حدد دالة أصلية لدالة $f+g$. 2) حدد دالة أصلية لدالة $\alpha\times f$.

2. خاصية

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي و $\alpha\in\mathbb{R}$.

- $F+G$ هي دالة أصلية ل $f+g$.
- $\alpha\times F$ هي دالة أصلية ل $\alpha\times f$.

3. مثال:

لنعتبر الدوال: $g(x)=\cos(x)$ و $f(x)=3x$ و $h(x)=3x+2\cos(x)$.

II الدوال الأصلية و العمليات

الدالة h	دالة الأصلية ل h هي F
$h=f'+g'$	$F=f+g$
$h=\alpha f'$	$F=\alpha f$
$h=f'\times g+f\times g'$	$F=f\times g$
$h=-\frac{g'}{g^2}$	$F=\frac{1}{g}$
$h=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$	$F=\frac{f}{g}$
$h=f'\times f^n$ مع $n\neq -1$	$F=\frac{1}{n+1}f^{n+1}$
$h=f'\times f^r$ مع $r\neq -1$	$F=\frac{1}{r+1}f^{r+1}$
$h=f'\times g'\circ f$	$F=g\circ f$
$h=f'(ax+b)$ مع $a\neq 0$	$F=\frac{1}{a}f(ax+b)$
$\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$	$\arctan(u(x))+c$

III جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية

الدالة f	الدوال الأصلية ل f
$f(x)=a;(a\in\mathbb{R})$	$F(x)=ax+c$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2+c$
$f(x)=x^n;(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$f(x)=x^r;(r\in\mathbb{Q}\setminus\{-1\})$	$F(x)=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$
$f(x)=\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+c$
$f(x)=\sin(ax+b)\ a\neq 0$	$F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$f(x)=\cos(x)$	$F(x)=\sin(x)+c$
$f(x)=\cos(ax+b)\ a\neq 0$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$f(x)=1+\tan^2(x)$	$F(x)=\tan(x)+c$
$f(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$F(x)=2\sqrt{f(x)}+c$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+c$

ملحوظة: c عدد حقيقي .