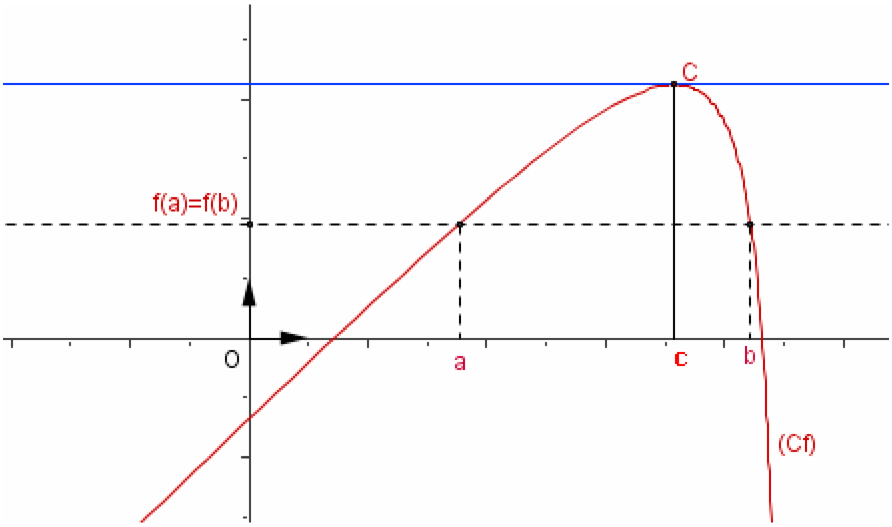
مبرهنة التزايدات المنتهية

I

1- مبرهنة رول

تذكير: اذاكان لدالة f مطراف نسبي في c و كانت f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c)=0$

لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث $f(a)=f(b)$



الشكل جانبه يؤول هندسيا هذه الشروط:

يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C من المنحنى (C_f) أفصولها ينتمي الى $]a;b[$ بحيث المماس لـ (C_f) في C يوازي محور الافاصيل أي يوجد c من $]a;b[$ بحيث $f'(c)=0$

لنبرهن هذا

*- إذا كانت f ثابتة فان $f'(c)=0 \quad \forall c\in]a;b[$

*- f دالة غير ثابتة ومنه يوجد $x_0\in]a;b[$ حيث $f(x_0)\prec f(a)=f(b)$ أو $f(x_0)\succ f(a)=f(b)$

بما أن f متصلة على $[a;b]$ فان f تقبل قيمة قصوى $M=\underset{x\in[a,b]}{\operatorname{Sup}} f(x)$ و قيمة دنيا $m=\underset{x\in[a,b]}{\operatorname{Inf}} f(x)$

لدينا $M\neq f(a)=f(b)$ أو $m\neq f(a)=f(b)$ لأن إذا كان غير ذلك فان f ستكون ثابتة

إذا كان $M\neq f(a)=f(b)$ فانه يوجد c من $]a;b[$ حيث $f(c)=M$ أي أن f تقبل قيمة قصوى عند c و حيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c)=0$

إذا كان $m\neq f(a)=f(b)$ فانه يوجد c من $]a;b[$ حيث $f(c)=m$ أي أن f تقبل قيمة دنيا عند c و حيث f قابلة للاشتقاق في c فان $f'(c)=0$

مبرهنة رول

اذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a;b]$ تحقق الشروط التالية:

1- f متصلة على $[a;b]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

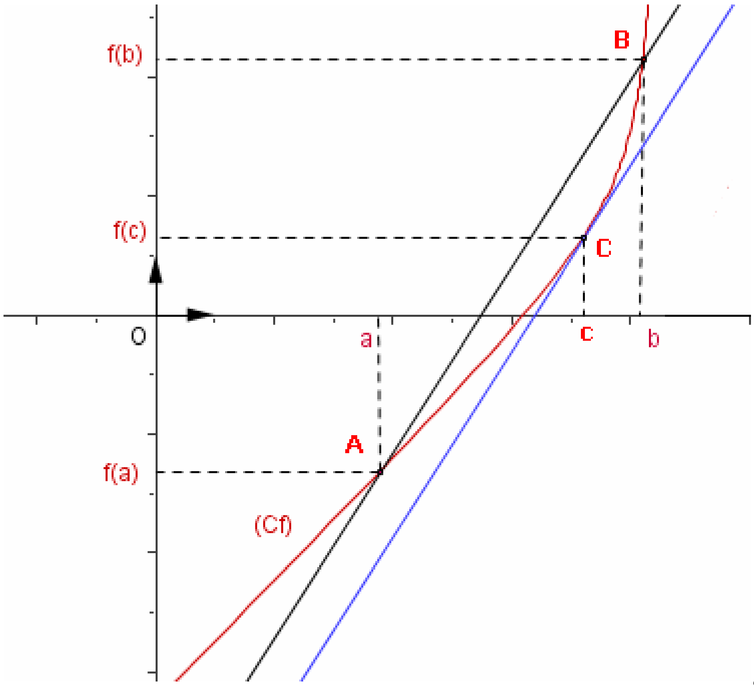
3- $f(a)=f(b)$

فانه يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $f'(c)=0$

ملاحظات

- ❖ وجود c من $]a;b[$ حيث $f'(c)=0$ لا يستثني وجود نقط أخرى k حيث $f'(k)=0$
- ❖ لتطبيق مبرهنة رول الشروط الثلاث ضرورية
- ❖ معطيات مبرهنة رول شروط كافية، لكنها غير لازمة

2- مبرهنة التزايدات المنتهية



لتكن f دالة متصلة على $[a;b]$
و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

الشكل جانبه يؤول هندسيا الشرطين:
يظهر من خلال الشكل عن وجود نقطة C
من المنحنى (C_f) أفصولها ينتمي الى $]a;b[$
بحيث المماس لـ (C_f) في C يوازي (AB)
أي أن معامليهما الموجهين متساويين
يوجد c من $]a;b[$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

لنبرهن هذا

نعتبر $g(x)=f(x)-\left[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]$

لدينا إذن g دالة متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

لدينا $g(a)=g(b)=0$

اذن حسب مبرهنة رول يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $g'(c)=0$

$$\forall x\in]a;b[\qquad g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

و منه $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a;b]$ تحقق الشرطين التاليين: 1- f متصلة على $[a;b]$ 2- f قابلة للاشتقاق على $]a;b[$ فانه يوجد عنصر c من $]a;b[$ حيث $(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$

ملاحظات

وجود c من $]a;b[$ حيث $(b-a)f'(c)=f(b)-f(a)$ لا يستثني وجود نقط أخرى k
حيث $(b-a)f'(k)=f(b)-f(a)$

تمرين

1- بين أن $|\sin x-\sin y|\le|x-y| \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

2- استنتج أن $|\sin x|\le x \quad \forall x\in\mathbb{R}+$

3- خاصية

نشاط

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I=[x_0;+\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

حيث $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x)\geq g'(x)$ لكل x من I نعتبر $h=f-g$ على I

بتطبيق مبرهنة التزايدات المتهية على h في المجال $[x_0;x]$ حيث $x\in I$ بين أن $f(x)\geq g(x)$ لكل x من I

الجواب

لدينا g متصلة على $[x_0;x]$ و قابلة للاشتقاق على $]x_0;x[$ لكل x من I

ومنه يوجد عنصر c من $]x_0;x[$ حيث $(x-x_0)h'(c)=h(x)-h(x_0)$ أي $(x-x_0)h'(c)=h(x)$

و بما أن $h'(c)=f'(c)-g'(c)$ و $f'(x)\geq g'(x)$ لكل x من I فان $h'(c)\geq 0$ أي $(x-x_0)h'(c)\geq 0$

ومنه $h(x)\geq 0$ لكل x من I

اذن $f(x)\geq g(x)$ لكل x من I

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I=[x_0;+\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

إذا كان $f(x_0)=g(x_0)$ و $f'(x)\geq g'(x)$ لكل x من I فان $f(x)\geq g(x)$ لكل x من I

ملاحظة: يمكن تعويض المجال I بـ $]-\infty;x_0]$ أو $[x_0;a]$ أو $]a;x_0]$ أو $[x_0;a[$ و الخاصية تبقى صالحة

تمرين

1- بين أن $x-\frac{x^3}{3}\leq \arctan x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

2- بين أن $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

تمرين

نعتبر المتتالية $u_n=1+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.