

## تمارين الأقمار الاصطناعية والكواكب

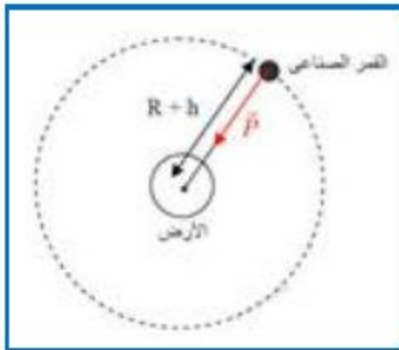
### تمرين 1:

يعتبر كوكب زحل الكوكب الذي له أكبر عدد من الأقمار التابعة له.  
أكبر الأقمار الخمسون التابعة له هو تيتان . يدور هذا الأخير في مسار دائري شعاعه  $r = 1,22.10^6 km$  ودوره المداري  $T = 15,9 j$  .

- 1- بين أن حركة تيتان دائرية منتظمة.
  - 2- أثبت تعبير النور المداري بدلالة  $G$  و  $r$  و  $M_S$  كتلة زحل.
  - 3- أحسب كتلة زحل.
- نعطي : ثابتة التجاذب الكوني :  $G = 6,67.10^{-11} (S.I)$

### تمرين 2:

يدور قمر اصطناعي حول الأرض على ارتفاع  $h = 205 km$  من سطح الأرض .  
كتلة القمر الاصطناعي  $m = 87,3 kg$  .

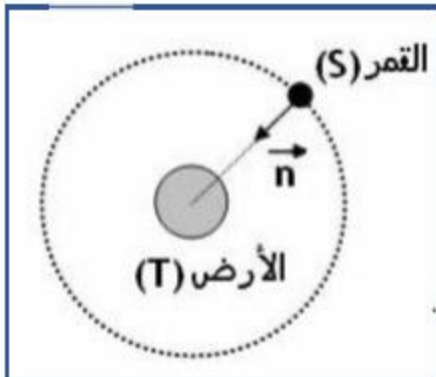


- 1- النور المداري للقمر الإصطناعي و استنتج تردد دورانه.
  - 2- سرعته .
  - 3- تسارعه المنظمي وتسارعه المماسي واستنتج تسارعه الكلي.
  - 4- شدة القوة المطبقة عليه من طرف الأرض.
- نعطي:

شعاع الأرض:  $R = 6380 km$   
كتلة الأرض :  $M = 5,98.10^{24} kg$   
ثابتة التجاذب الكوني :  $G = 6,67 . 10^{-11} (S.I)$

### تمرين 3:

تمكن كل من دراسة حركة الأرض حول الشمس ودراسة حركة الأقمار الإصطناعية حول الأرض ، من مقارنة كتلة الشمس (S) ب كتلة الأرض (T) .  
معطيات:



الدور المداري لحركة الأرض حول الشمس :  $T_T = 365 jours$  .  
شعاع المدار النانري لحركة مركز الأرض حول الشمس :  
 $r_T = 1,5.10^8 km$

دور دوران الأرض حول محورها القطبي :  $T_0 = 1 jour$   
نعتبر قمرا اصطناعيا (S) ساكنا بالنسبة للأرض ، كتلته  $m_0$  و شعاعه في المعلم المركزي الأرضي هو :  $r_0 = 4,2.10^4 km$  .  
نهمل تأثير باقي الكواكب على كل من الأرض (T) والقمر الإصطناعي (S) أنظر الشكل.

- 1- ما هي الشروط التي يجب أن تتوفر ليكون قمر اصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض .
- 2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على القمر الاصطناعي (S) في المعلم المركزي الأرضي ، أثبت أن تعبير متجه تسارع مركز قصور القمر (S) هو :  $\vec{a} = \frac{G.m}{r_0^2} \vec{n}$  ، حيث  $G$  ثابتة التجاذب الكوني ، و  $\vec{n}$  التجهة الواحدية المنظمية لمعلم فريزي
- 3- بين أن حركة القمر الاصطناعي (S) في المعلم المركزي الأرضي ، منتظمة ودائرية .
- 4- استنتج بدلالة  $G$  و  $m$  و  $r_0$  ، تعبير الدور المداري  $T$  للقمر (S) حول الأرض .
- 5- يعبر عن القانون الثالث لكيبلير بالعلاقة :  $\frac{T^2}{r_0^3} = K$  ، أوجد تعبير الثابتة  $K$  بدلالة  $G$  و  $m$  .
- 6- حدد تعبير النسبة  $\frac{M}{m}$  بدلالة  $r_0$  و  $r_T$  و  $T_0$  و  $T_T$  . أحسب كتلة الأرض علما أن كتلة الشمس تقارب :  $M = 2.10^{30} \text{ kg}$

#### تمرين 4:

ينور حول الأرض مجموعة من الأقمار الاصطناعية في مدارات دائرية وذلك من أجل تقديم مجموعة من الخدمات للإنسان ، كالإتصال ومراقبة أحوال الطقس والحدود الجغرافية ..... ومن بين هذه الأقمار نجد أقمارا نقول إنها ساكنة بالنسبة للأرض .

الهدف من هذا التمرين هو دراسة حركة قمر اصطناعي ساكن بالنسبة للأرض تم وضعه في مداره على ارتفاع  $h = 36000 \text{ km}$  بالنسبة لسطح الأرض .

معطيات :

ثابتة التجاذب الكوني :  $G = 6,67.10^{-11} \text{ (S.I)}$

كتلة الأرض :  $M_T = 5,98.10^{24} \text{ kg}$

شعاع الأرض :  $R_T = 6350 \text{ km}$

1- ماهو المعلم الذي نختاره لدراسة هذه الأقمار .

2- ما هي الشروط الواجب توفيرها ليكون القمر الاصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض .

3- مثل على تبيانه القمر الاصطناعي في مداره حول الأرض ثم بين القوة المطبقة عليه  $\vec{F}_{T/S}$  ومتجهه سرعته  $\vec{v}$  ومتجهه تسارعه  $\vec{a}$  .

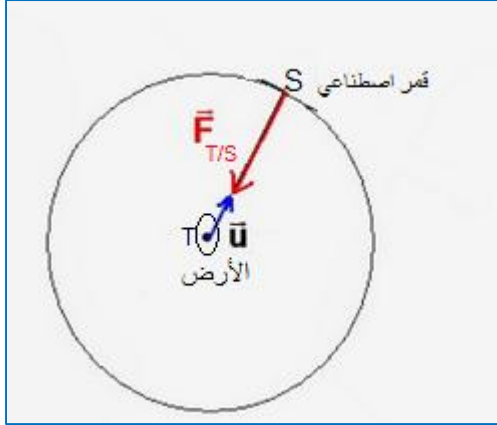
4- أوجد تعبير سرعة القمر بدلالة  $G$  و  $M_T$  و  $R_T$  و  $h$  . أحسب قيمتها .

5- أثبت القانون الثالث لكيبلير .

6- استنتج النور المداري بالنسبة للأرض ، ماذا يمثل هذا الدور بالنسبة للأرض .

## تصحيح تمارين حركة الأقمار الإصطناعية والكواكب

### تمرين 1:



1- نبين أن حركة تيتان دائرية منتظمة:

يخضع تيتان لقوة  $\vec{F}_{SLT}$  التجاذب الكوني المطبقة عليه من طرف زحل نعتبر عنها بالعلاقة:

$$\vec{F}_{S/T} = -G \frac{m \cdot M_S}{r^2} \vec{u}_{S/T}$$

حيث  $m$  كتلة القمر الإصطناعي و  $M_S$  كتلة زحل .

نطبق القانون الثاني لنيوتن على تيتان ، في المعلم المركزي لزحل :

$$\vec{F}_{S/T} = m\vec{a}$$

باعتبار المتجهة الواحدة  $\vec{n} = -\vec{u}_{ST}$  نكتب متجهة قوة التجاذب :

$$\vec{F}_{S/T} = G \frac{m \cdot M_S}{r^2} \vec{n}$$

$$m\vec{a} = G \frac{m \cdot M_S}{r^2} \vec{n}$$

$$\vec{a} = G \frac{M_S}{r^2} \vec{n}$$

في المعلم فرييني  $(T, \vec{u}, \vec{n})$  لدينا :  $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$

وبالتالي :  $\frac{dv}{dt} = 0$  أي  $V = cst$  ومنه الحركة منتظمة

و  $G \frac{M_S}{r^2} = \frac{v^2}{\rho}$  باعتبار  $\rho = r$  نستنتج :  $r = \frac{G \cdot M_S}{v^2} = cst$  إذن الحركة دائرية منتظمة.

2- تعبير الدور المداري:

الدور المداري  $T$  لتيتان هو المدة الزمنية التي ينجز فيها القمر دورة واحدة حول المريخ :

$$V = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{V}$$

تعبير السرعة :

$$G \frac{M_S}{r^2} = \frac{V^2}{r} \Rightarrow V^2 = \frac{GM_S}{r}$$

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{V} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_S}{r}}}$$

تعبير الدور المداري لتيتان :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G.M_S}} \text{ نستنتج:}$$

3-تحديد كتلة زحل:

العلاقة السابقة تكتب:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S}$$

$$M_S = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$$

ت.ع:

$$M_S = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \times \frac{(1,22 \cdot 10^9)^3}{(15,9 \times 24 \times 3600)^2}$$

$$M_S = 5,69 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

تمرين 2:

1-الدور المداري واستنتاج التردد:

الدور المداري هو مدة دورة واحدة للقمر الاصطناعي في مداره حول الأرض.

حسب القانون الثالث لكيبلير:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

حيث :  $M$  كتلة الأرض و  $r = R + h$  شعاع مدار القمر الاصطناعي.

العلاقة السابقة تكتب:

$$\frac{T^2}{(R + h)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M} (R + h)^3$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G.M}}$$

ت.ع:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{[(6380 + 205) \times 10^3]^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24}}}$$

$$T = 5,32 \cdot 10^3 s = 1h29min$$

يساوي التردد مقلوب الدور:

$$N = \frac{1}{T}$$

ت.ع:

$$N = \frac{1}{5,32 \cdot 10^3} = 1,88 \cdot 10^{-4} Hz$$

2- سرعة القمر الاصطناعي:

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(R+h)}{T}$$

ت.ع:

$$V = \frac{2\pi(6380 + 205) \times 10^3}{5,32 \cdot 10^3} = 7,78 \cdot 10^3 m \cdot s^{-1}$$

3- تسارع القمر الاصطناعي:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \text{ التسارع المماسي:}$$

بما أن حركة القمر الاصطناعي منتظمة ، فإن  $V = cst$  وبالتالي  $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$

$$a_N = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h} \text{ التسارع المنظمي:}$$

ت.ع:

$$a_N = \frac{(7,78 \cdot 10^3)^2}{(6380 + 205) \times 10^3} = 9,20 m \cdot s^{-1}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_N^2} \text{ التسارع الكلي:}$$

بما أن التسارع المماسي منعدم أي:  $a_t = 0$  فإن:

$$a = a_N = 9,20 m \cdot s^{-1}$$

4- شدة القوة المطبقة على القمر الاصطناعي:  
حسب القانون الثاني لنيوتن :

$$F = ma_N$$

ت.ع:

$$F = 87,3 \times 9,20 = 803N$$

ملحوظة :

يمكن استعمال شدة قوة التجاذب الكوني:

$$F = G \frac{M \cdot m}{(R + h)^2}$$

تمرين 3 :

1- الشروط لكي يكون قمرا ساكنا بالنسبة للأرض :

\* ينبغي أن يقع مداره في مستوى خط الإستواء.  
\* أن يدور في نفس منحى دوران الأرض حول محورها القطبي.  
\* أن يكون دوره المداري  $T$  مساويا لدور حركة دوران الأرض  $t_0$  حول محورها القطبي .

2- تعبير التسارع:

في المعلم المركزي الأرضي ، يخضع القمر الإصطناعي ( $S$ ) الى قوة التجاذب الكوني التي تطبقها الأرض عليه :

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{m \cdot m_0}{r_0^2} \vec{u}_{TS}$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{F}_{T/S} = m_0 \cdot \vec{a}$$

$$-G \frac{m \cdot m_0}{r_0^2} \vec{u}_{TS} = m_0 \cdot \vec{a} \text{ أي}$$

باعتبار المتجهة الواحدية  $\vec{n}$  هي :  $-\vec{u}_{TS} = \vec{n}$   
نستنتج :

$$(1) \quad \vec{a} = \frac{G \cdot m_0}{r_0^2} \vec{n}$$

3- نبين أن الحركة منتظمة ودائرية:

في معلم فريني  $(S, \vec{u}, \vec{n})$  نكتب تسارع القم الإصطناعي كالتالي :

$$(2) \quad \vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{u} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n}$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{أي أن } V = cst \quad \text{ومنه فإن الحركة منتظمة.}$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نكتب:

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{G.m_0}{r_0^2} \quad \text{مع } \rho = r_0 : \text{ نجد } r_0 = \frac{G.m}{V^2} = cst \quad \text{وبالتالي الحركة دائرية.}$$

4- تعبير الدور  $T$  :

$$T = \frac{2\pi r_0}{V} : \text{ نعلم أن}$$

$$V = \sqrt{\frac{G.m}{r_0}} \quad \text{ومنه } V^2 = \frac{G.}{r_0} \quad \text{و}$$

نستنتج تعبير  $T$  :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{G.m}}$$

5- تعبير الثابتة  $K$  :

تعبير الدور  $T$  يكتب :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r_0^3}{G.m}$$

$$\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G.m} \quad (3)$$

$$\frac{T^2}{r_0^3} = K : \text{ بما أن}$$

$$K = \frac{4\pi^2}{G.m} : \text{ فإن}$$

6- تعبير النسبة  $\frac{M}{m}$  :

- باعتبار حركة القمر (S) حول الأرض مع  $T = T_0$  العلاقة (3) تكتب:  $\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G.m}$

- باعتبار حركة الأرض (T) حول الشمس مع  $T = T_T$  و  $r_0 = r_T$  العلاقة (3) تكتب:  $\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{4\pi^2}{G.M}$

$M$  كتلة الشمس

نجز قسمة العلاقة الأولى على العلاقة الثانية :

$$\frac{\frac{T_0^2}{r_0^3}}{\frac{T_T^2}{r_T^3}} = \frac{\frac{4\pi^2}{G.m}}{\frac{4\pi^2}{G.M}}$$

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{T_0}{T_T}\right)^2 \cdot \left(\frac{r_T}{r_0}\right)^3$$

ت.ع:

$$\frac{M}{m} = \left(\frac{1}{365}\right)^2 \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^8}{4,2 \cdot 10^4}\right)^3 = 3,4 \cdot 10^5$$

كتلة الشمس أكبر بحوالي 340 000 مرة من كتلة الارض.

$$m = \frac{2 \cdot 10^{30}}{3,4 \cdot 10^5} = 5,88 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

تمرين 4 :

1-المعلم المناسب لهذه الدراسة :

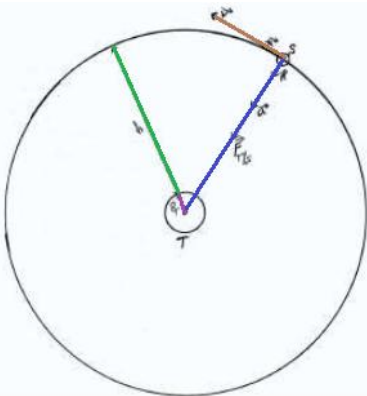
المعلم المركزي الأرضي ، أصله مركز الأرض ومحاوره موجهة نحو ثلاث نجوم ثابتة .

2-لكي يكون القمر الإصطناعي ساكنا بالنسبة للأرض يجب :

- أن يساوي دوره المداري دو دوران الأرض حول محورها القطبي .
- أن يدور في منحنى دوران الأرض حمل نفسها .
- أن يدور في مستوى خط الإستواء.

3-تمثيل المتجهات :  $\vec{F}_{T/S}$  و  $\vec{V}$  و  $\vec{a}$  :

أنظر الشكل





4- تعبير سرعة القمر الإصطناعي :

يخضع القمر الإصطناعي الى قوة التجاذب

$$\vec{F}_{T/S} = -G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} \vec{u}_{TS} \text{ الكوني}$$

القانون الثاني لنيوتن يكتب:

$$\vec{F}_{T/S} = m \vec{a}$$

باعتبا معلم فرييني  $(S, \vec{u}, \vec{n})$  نسقط العلاقة على  $(S, \vec{n})$  نجد :

$$F_{T/S} = m \cdot a_N$$

$$G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = m \cdot \frac{V^2}{R_T + h}$$

$$V^2 = \frac{G \cdot M_T}{R_T + h} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$$

ت.ع:

$$V = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24}}{6350 \cdot 10^3 + 36000 \times 10^3}} = 3069 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

5- إثبات القانون الثالث لكيبلير :

نعلم أن:

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_T+h)^2}{V^2} \text{ أي } T = \frac{2\pi(R_T+h)}{V}$$

كما أن:

$$V^2 = \frac{G \cdot M_T}{R_T + h}$$

وبالتالي :

$$T^2 = \frac{4\pi^2(R_T + h)^2}{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}} = \frac{4\pi^2(R_T + h)^3}{G \cdot M_T}$$

نستنتج القانون الثالث لكيبلير:

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$$

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = K$$

6- حساب دور حركة الأرض حول محورها القطبي:  
نعلم أن :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{V}$$

ت.ع:

$$T = \frac{2\pi(6350 + 36000) \times 10^3}{3069} = 86703s$$