

سلسلة 2	المتتاليات العددية	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
<p style="text-align: right;">تمرين 1: نعتبر المتتالية: $u_n = \frac{2^n}{n!}$ حيث $n \in \mathbb{N}$</p> <p>(1) تحقق أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1}$ ثم استنتج أن: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ لكل $n \geq 3$</p> <p>(2) بين أن: $u_n \leq u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ لكل $n \geq 3$</p> <p>(3) حدد: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$</p>		
<p style="text-align: right;">تمرين 2: نعتبر المتتالية: $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>(1) ادرس رتبة u_n</p> <p>(2) تحقق أن: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ لكل $k \in \mathbb{N}_{-\{0,1\}}$</p> <p>(3) استنتج أن: $\forall n \in \mathbb{N}_{-\{0,1\}} u_n < 2 - \frac{1}{n}$</p> <p>(4) بين أن u_n متقاربة.</p>		
<p style="text-align: right;">تمرين 3: نعتبر المتتالية: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} ; n \geq 0 \end{cases}$</p> <p>(1) ادرس رتبة u_n</p> <p>(2) بين أن u_n غير مكبورة (استعمل برهانا بالخلف)</p> <p>(3) استنتج ؟</p>		
<p style="text-align: right;">تمرين 4: نعتبر المتتالية: $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>(1) ادرس رتبة u_n</p> <p>(2) بين أن: $k! \geq 2^{k-1}$ لكل $k \in \mathbb{N}^*$</p> <p>(3) استنتج أن u_n متقاربة.</p>		
<p style="text-align: right;">تمرين 5: نعتبر المتتالية: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>(1) ادرس رتبة u_n</p> <p>(2) تحقق أن: $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ثم استنتج أن: $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$</p> <p>(3) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$</p> <p>(4) نضع $p_n = S_{2n} - S_n$ ، بين أن p_n متقاربة.</p>		

سلسلة 2	المتتاليات العددية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1: نعتبر المتتالية: $u_n = \frac{2^n}{n!}$ حيث $n \in \mathbb{N}$		
	<p>لدينا: $\forall n \geq 3 \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2 \times 2^n}{n! \times (n+1)} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$</p> <p>منه: $n \geq 3 \Rightarrow n+1 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$</p>	1
	<p>حسب السؤال السابق نستنتج أن: $\frac{u_4}{u_3} \leq \frac{1}{2}$ و $\frac{u_5}{u_4} \leq \frac{1}{2}$ و ... و $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{2}$</p> <p>بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف و بعد الختزال نجد: $\frac{u_n}{u_3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ أي: $u_n \leq u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$</p>	2
	<p>لدينا: $0 \leq u_n \leq u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ و بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = u_3 \times 0 = 0$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$</p>	3
تمرين 2: $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$		
	<p>لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ بالتالي المتتالية تزايدية قطعاً.</p>	1
	<p>لدينا لكل $k \in \mathbb{N}_{\{0,1\}}$: $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k^2} = \frac{k - (k-1)}{k^2(k-1)} = \frac{1}{k^2(k-1)} > 0$</p> <p>منه: $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} > \frac{1}{k^2}$</p>	2
	<p>لدينا حسب السؤال السابق: $\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ و ... و $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$</p> <p>بعد جمع المتفاوتات طرفا بطرف والتبسيط نجد: $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$ منه: $u_n < 2 - \frac{1}{n}$</p>	3
	<p>لدينا حسب السؤال السابق $u_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$، إذن المتتالية مكبورة بـ 2 وتزايدية قطعاً فهي متقاربة.</p> <p>لا يمكن القول أن المتتالية مكبورة بـ $2 - \frac{1}{n}$ لأنه تعبير يتضمن المتغير n وليس بعدد ثابت.</p>	4
تمرين 3: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}; n \geq 0 \end{cases}$		
	<p>سنبين أولاً أن $\forall n \in \mathbb{N} u_n > 0$، بالنسبة لـ $n=0$، $u_0 = 1 > 0$، نفترض أن $u_n > 0$ منه: $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$</p> <p>الآن لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ منه $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تزايدية قطعاً.</p>	1
	<p>نفترض أن u_n مكبورة، إذن ولكونها تزايدية فهي متقاربة، نضع: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = a$</p> <p>لدينا: $\forall n \geq 0 u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ منه: $\forall n \geq 0 u_n u_{n+1} = u_n^2 + 1$</p>	2

منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n u_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 + 1)$ منه: $a^2 = a^2 + 1$ منه : $0 = 1$ وهذا غير ممكن
إذن u_n متتالية غير مكبورة

3 بما أن u_n متتالية تزايدية و غير مكبورة فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

تمرين 4: $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$

1 لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ بالتالي المتتالية تزايدية قطعاً.

2 لنبين بالترجع أن: $k! \geq 2^{k-1}$ لكل $k \in \mathbb{N}^*$
بالنسبة لـ $k=1$ $1! = 2^{1-1} = 1$ ، نفترض أن $k! \geq 2^{k-1}$ ، إذن: $(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1)2^{k-1} \geq 2 \times 2^{k-1} \geq 2^k$

3 لدينا حسب السؤال السابق: $\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$ و $\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$ و $\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$ و \dots و $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
إذن: $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) < 2$
، إذن المتتالية مكبورة بـ 2 وتزايدية قطعاً فهي إذن متقاربة.

تمرين 5: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$

1 لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} > 0$ ، بالتالي S_n تزايدية قطعاً

2 لدينا: $S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$
منه: $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$

ولدينا: $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$ و $\frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{2n}$ و \dots و $\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}$ منه: $S_{2n} - S_n \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2}$

نفترض أن u_n مكبورة إذن و لكونها تزايدية فهي متقاربة ، نضع $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = a$

3 منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$ منه $a - a \geq \frac{1}{2}$ وهذا غير ممكن

إذن u_n غير مكبورة بالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

لدينا: $P_{n+1} - P_n = (S_{2n+2} - S_{n+1}) - (S_{2n} - S_n) = (S_{2n+2} - S_{2n}) - (S_{n+1} - S_n) = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$

$$= \frac{-1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

3 إذن p_n تزايدية قطعاً، من جهة أخرى لدينا: $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ و $\frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}$ و \dots و $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1}$

منه: $p_n = S_{2n} - S_n \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ fois}} = \frac{n}{n+1} < 1$ ، إذن p_n مكبورة بـ 1 بالتالي فهي متقاربة.