ثم نحسب v_1 عند اللحظة $t_1 = t_0 + \Delta t$: $v_1 = v_0 + a_0.\Delta t$

نحسب a_1 عند اللحظة t_1 باستعمال المعادلة التفاضلية : $a_1 = B - A.v_1$

ثم نحسب v_2 عند اللحظة $t_2 = t_1 + \Delta t$: $v_2 = v_1 + a_1.\Delta t$

بصفة عامة : $a_i = B - Av_i$ و $v_{i+1} = v_i + a_i\Delta t$

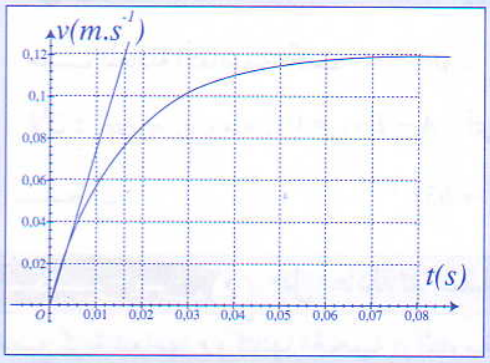
تمرين 1 دراسة سقوط رمية في الغليسرين

ندرس الحركة الرأسية، بدون سرعة بدئية ($v_0 = 0$ عند $t = 0$) لسقوط رمية (قطعة مسطحة كتلتها m وحجمها V_0) في مخبار مدرج يحتوي على الغليسرين ذي الكتلة الحجمية ρ_0 .

نعتبر أن الرمية تخضع لقوة الاحتكاك المائع المنمذجة بمتجهة $\vec{f}$ لها نفس اتجاه متجهة السرعة $\vec{v}$ ومنحاها معاكس لمنحى الحركة ؛

شدتها $f = K.v$ مع K ثابتة موجبة.

نحصل على المنحنى جانبه ،والذي يمثل تطور السرعة v بدلالة الزمن.



1 ـ اجرد القوى المطبقة على الرمية خلال سقوطها في الغليسرين، ومثلها على تبيانة دون اعتبار للسلم.

2 ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن، بين أن حركة مركز قصور الرمية تحقق المعادلة التفاضلية التالية : $\frac{dv}{dt} = A - B.v$

أعط التعبير الحرفي لكل من A و B بدلالة معطيات النص.

3 ـ باستعمال المنحنى $v(t)$، حدد قيمة كل من A و B.

حل

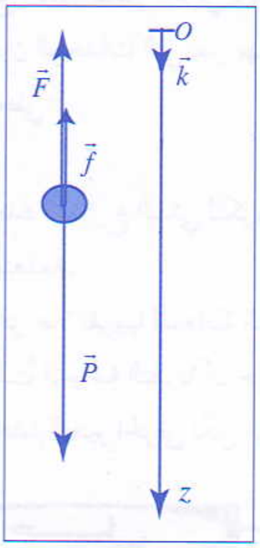
1 ـ ندرس حركة الرمية بالنسبة للمرجع الأرضي الذي يمكن اعتباره غاليليا.

القوى الخارجية المطبقة على الرمية :

$\vec{P} = m\vec{g}$: وزن الرمية.

$\vec{F} = -m_f.\vec{g}$: دافعة أرخميدس (m_f كتلة السائل المزاح)

$\vec{f} = -K.v.\vec{k}$: قوة احتكاك المائع.



2 ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الرمية نكتب : $m.\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f}$

بما أن الحركة رأسية، نسقط العلاقة المتجهية على المحور (oz) الموجه نحو الأسفل.

إذن :

$$m.a = m\frac{dv}{dt} = mg - F - f$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho_0 V_0 g - K.v$$

$$m\frac{dv}{dt} = g(m - \rho_0.V_0) - K.v$$

أو :

$$\frac{dv}{dt} = g(1 - \frac{\rho_0 V_0}{m}) - \frac{K}{m}v$$

نحصل على معادلة تفاضلية على شكل : $\frac{dv}{dt} = A - B.v$ مع $A = g(1 - \frac{\rho_0 V_0}{m})$ و $B = \frac{K}{m}$

3 - حساب A و B

عند $t = 0$ ، لدينا $v_0 = 0$ ، ومنه تصير المعادلة التفاضلية كالتالي :

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A - B.v_0 = A$$

تساوي A قيمة المعامل الموجه لماس المنحنى $v(t)$ عند $t = 0$.

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A = \frac{0,12 - 0}{0,016 - 0} = 7,5 m.s^{-2}$$

في النظام الدائم تكون السرعة ثابتة

أي أن : $v = v_\ell = 0,12 m.s^{-1}$

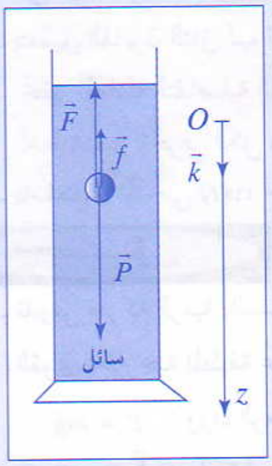
حسب المعادلة التفاضلية نكتب : $\frac{dv_\ell}{dt} = A - B.v_\ell = 0$

لأن : $v_\ell = cte$ ومنه : $A - B.v_\ell = 0$ أي أن : $A = B.v_\ell$

نستنتج أن : $B = \frac{A}{v_\ell} = \frac{7,5}{0,12} \approx 63 s^{-1}$

في النظام الدائم تكون السرعة ثابتة أي أن : $\frac{dv}{dt} = 0$

تمرين 2 حل معادلة تفاضلية بالطريقة الرقمية لأولير (Euler)



تخضع كرية شعاعها r وكتلتها الحجمية ρ أثناء سقوطها الرأسي داخل سائل كتلته الحجمية ρ_0 ولزوجته η إلى القوى التالية :

$$\vec{P} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.g.\vec{k}$$

$$\vec{F} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g.\vec{k}$$

$$\vec{f} = -6\pi\, \eta.r.v.\vec{k}$$

1 - بين أن المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة تكتب على الشكل التالي : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = c$ (1)

مع تحديد التعبير الحرفي لكل من الثابتتين τ و c.

2 - عين الوحدات التي يعبر بها عن كل من τ و c. احسب قيمتيهما.

نعطي : $r = 1mm$ و $\rho = 2600 kg.m^{-3}$

$\rho_0 = 970 kg.m^{-3}$, $\eta = 5,00 Pa.s$, $g = 9,81 N.kg^{-1}$

3 - حدد التسارع البدئي للكرية والسرعة الحدية v_ℓ التي تصل إليها، علما أن السرعة البدئية للكرية عند $t = 0$ تكون منعدمة.

4 - أنجز حلا تقريبيا للمعادلة التفاضلية (1) باستعمال الطريقة المبيانية لأولير، باتخاذ خطوة الحساب $\Delta t = 5.10^{-5} s$

5 - بيّنتْ الدراسة النظرية أن حل هذه المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل : $v = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

حدد التعبير الحرفي لكل من الثابتتين A و B.

حل

1 - إثبات المعادلة التفاضلية بالنسبة للسرعة

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن في معلم غاليلي، على الكرية، نكتب : $m.\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{f}$

$$m=\rho.V \quad \text{مع} \quad \rho.\frac{4}{3}\pi r^3.\vec{a} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.g.\vec{k} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g.\vec{k} - 6\pi\eta r.v.\vec{k}$$

نسقط هذه العلاقة على المحور Oz

$$\rho.\frac{4}{3}\pi r^3.\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho.g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g - 6\pi\eta r.v$$

ومنه : $\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho_0}{\rho}g - \frac{9\eta}{2r^2\rho}.v$ أي أن : $\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2r^2\rho}.v = g(1-\frac{\rho_0}{\rho})$

أو : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = c \quad (1)$ مع $c = g(1-\frac{\rho_0}{\rho})$ و $\tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta}$

2- حساب c وτ

يجب أن يعبر عن الحدود الثلاثة في المعادلة التفاضلية *(1)* بنفس الوحدة ؛

بما أن $\frac{dv}{dt}$ معبر عنها بـ $m.s^{-2}$ فإن c يعبر عنها كذلك بـ $m.s^{-2}$ و τ بـ s.

حساب قيمتي c و τ:

$$c = 9,81.(1-\frac{970}{2600}) = 6,15 m.s^{-1} \quad \text{و} \quad \tau = \frac{2.(10^{-3})^2.2600}{9.5} = 1,156.10^{-4} s$$

3- التسارع البدئي والسرعة الحدية للكرية

حسب المعادلة التفاضلية، عند $t = 0$، يكون $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} + \frac{v_0}{\tau} = c$ مع $v_0 = 0$

نحصل على : $a(0) = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = c = 6,15 m.s^{-2}$

عندما تصل سرعة الكرية إلى قيمتها الحدية، تكون $\frac{dv_\ell}{dt} = 0$ أي أن : $\frac{v_\ell}{\tau} = c$

ومنه : $v_\ell = \tau.c = 1,156.10^{-4}.6,15 = 7,10.10^{-4} m.s^{-1}$

4- إنجاز الحل التقريبي للمعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = c$

لدينا : $a = \frac{dv}{dt} = c - \frac{v}{\tau}$ أو $a = 6,15 - 8650.v$ مع $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{1,156.10^{-4}} \approx 8650.s^{-1}$

أو بشكل تقريبي يمكن أن نكتب : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 6,15 - 8650.v$

ومنه : $\Delta v = 6,15.\Delta t - 8650.\Delta t.v$ مع $\Delta t = 5.10^{-5} s$

أو بتعبير آخر : $\Delta v = 3,075.10^{-4} - 0,432.v$

بين اللحظتين t_i و$t_i + \Delta t$، تتغير السرعة بالقيمة $\Delta v = v_{i+1} - v_i$ أي أن :

$$\Delta v = v_{i+1} - v_i = 3,075.10^{-4} - 0,432.v_i$$

$$v_{i+1} = 3,075.10^{-4} + 0,568.v_i$$

لدينا عند $t = 0$، $v_0 = 0$ إذن :

$t_1 = t_0 + \Delta t$ عند $v_1 = 3,075.10^{-4} m.s^{-1}$

$t_2 = t_1 + \Delta t$ عند $v_2 = 3,075.10^{-4} + 0,568.3,075.10^{-4} = 4,82.10^{-4} m.s^{-1}$

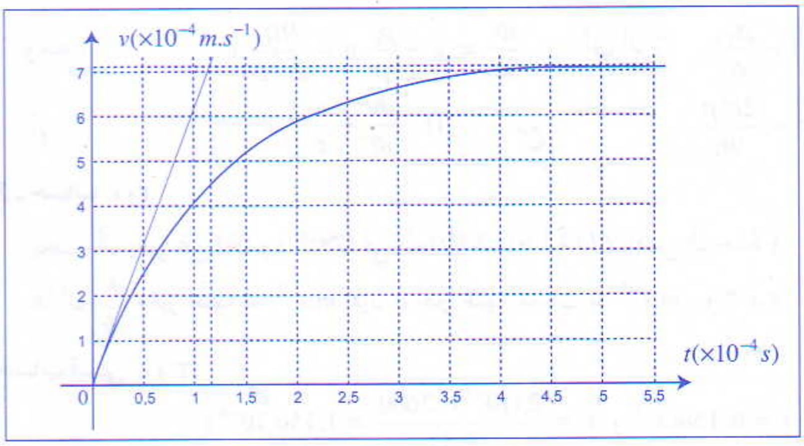
$t_3 = t_2 + \Delta t$ عند $v_3 = 3,075.10^{-4} + 0,568.4,82.10^{-4} = 5,81.10^{-4} m.s^{-1}$

وبنفس الطريقة نجد v_4 و v_5 و v_6 و v_7 إلى أن تقترب السرعة من السرعة الحدية v_ℓ.

نجمع النتائج المحصلة في الجدول التالي :

$t(10^{-4}s)$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
$v(10^{-4}m.s^{-1})$	0	3,075	4,82	5,81	6,37	6,69	6,87	6,97	7,03	7,06

نرسم المنحنى $v = f(t)$.



5 ـ حل المعادلة التفاضلية نظريا.

لدينا : $v = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

عند اللحظة $t = 0$ لدينا، $v(0) = Ae^{-0} + B = 0$ ومنه : $A = -B$ أي أن : $v = -Be^{-\frac{t}{\tau}} + B = B(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

نشتق v بالنسبة للزمن : $\frac{dv}{dt} = \frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

نعوض v و $\frac{dv}{dt}$ بتعبيريهما في المعادلة التفاضلية $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = c$

$\frac{B}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{B}{\tau}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = c$ ومنه : $\frac{B}{\tau} = c$

إذن : $B = \tau.c = v_\ell = 7,10.10^{-4}m.s^{-1}$

وبالتالي : $v = v_\ell(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 7,10.10^{-4}(1 - e^{-8650.t})$

للتأكد من صلاحية النموذج المعتمد لقوة الاحتكاك، نمثل في نفس نظمة المحورين المنحنى المحصل بطريقة أولير والمنحنى المحصل عن طريق الحل الرياضي للمعادلة التفاضلية.

تمرين 3

تكتب المعادلة التفاضلية خلال سقوط كرية في مائع على شكل : $\frac{dv}{dt} = A - B.v^2$

يمكن حل هذه المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة أولير.

يمثل الجدول التالي مقتطفا من ورقة حساب قيم السرعة v والتسارع a بدلالة الزمن t، باستعمال القيم التالية لكل من A و B وخطوة الحساب Δt.

$A = 9,8m.s^{-2}$ و $B = 1,56.10^{-2}m^{-1}$ $\Delta t = 0,5s$

$t(s)$	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	300
$v(m.s^{-1})$	0,00	4,90	9,61	13,8	17,2	v_5	21,6
$a(m.s^{-2})$	9,80	9,43	8,36	6,83	a_4	3,69	2,49

1 - أوجد قيمة كل من a_4 و v_5 .

2 - عبر عن السرعة الحدية للكرية بدلالة A و B. واحسب قيمتها.

حـــل

1 - بمعرفة قيمة السرعة v_4 عند اللحظة t_4 ، يمكن حساب التسارع a_4 عند نفس اللحظة.

باستعمال المعادلة التفاضلية : $a = \frac{dv}{dt} = A - B.v^2$ نجد أن :

$$a_4 = \frac{dv}{dt} = A - Bv_4^2 = 9,8 - 1,56.10^{-2}(17,2)^2 = 5,18m.s^{-2}$$

- لحساب السرعة v_5 عند اللحظة t_5 ، نستعمل العلاقة التقريبية بين اللحظتين t_4 و t_5 .

يعني $a_4 = \frac{v_5 - v_4}{t_5 - t_4}$ ومنه : $v_5 = a_4\Delta t + v_4 = 5,18.0,5 + 17,2 = 19,8m.s^{-1}$

2 - **تعبير السرعة الحدية للكرية**

عندما تأخذ السرعة القيمة الحدية v_ℓ تصبح ثابتة :

يعني : $\frac{dv_\ell}{dt} = A - B.v_\ell^2 = 0$ أي أن : $v_\ell = \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{9,8}{1,56.10^{-2}}} = 25,1m.s^{-1}$

تمرين موضوعاتي 4 دراسة حركة قطرة المطر في الهواء

تتكون قطرة مطر كتلتها $m = 15\mu g$ ، انطلاقا من السحاب، عند نقطة O توجد على ارتفاع $h = 830\ m$ من سطح الأرض.

من النقطة O، تسقط القطرة عند اللحظة $t = 0$، بدون سرعة بدئية $(v_0 = 0)$.

ندرس حركة القطرة في معلم الفضاء $(O,\vec{k})$ المرتبط بالمرجع الأرضي ومحوره (O,z) رأسي وموجه نحو الأسفل.

نعتبر أن كتلة قطرة المطر تبقى ثابتة خلال مدة السقوط.

1 - نهمل دافعة أرخميدس وقوى الاحتكاك المائع، ونأخذ $g = 9,8m.s^{-2}$.

احسب سرعة قطرة المطر عند وصولها سطح الأرض.

2 - نعتبر قطرة المطر كروية الشكل. قارن قيمة دافعة أرخميدس F_A المطبقة على قطرة المطر بوزنها P . ماذا تستنتج ؟

نعطي : - الكتلة الحجمية للماء : $\rho_e = 10^3 kg.m^{-3}$

- الكتلة الحجمية للهواء : $\rho_a = 1,21kg.m^{-3}$

3 - يعبر عن شدة قوة الاحتكاك المائع، المطبقة على قطرة المطر، بـ $f = K.v$ مع K معامل الاحتكاك المائع.

3.1 - أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة القطرة.

3.2 - عبر عن السرعة الحدية v_ℓ للقطرة بدلالة m و g و K.

3.3 - احسب معامل الاحتكاك المائع، علما أن قيمة سرعة الكرية عند وصولها سطح الأرض هي : $v_\ell = 9,5m.s^{-1}$

3.4 - تحقق من أن التعبير $v(t) = v_\ell(1 - e^{-\frac{K}{m}t})$ ، حلا للمعادلة التفاضلية المحصلة في السؤال (3.1).

4 - أثناء شحن مكثف سعته C عبر مقاومة R، تحت توتر E ،تكون المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u بين مربطي المكثف

هي : $u + R.C.\frac{du}{dt} = E$ ويكون حلها هو : $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

4.1 ـ أعط تعبير ثابتة الزمن لثنائي القطب RC واكتب تعبير $u(t)$ بدلالة t.

4.2 ـ بمقارنة تعبيري $u(t)$ و $v(t)$ استنتج ثابتة الزمن بالنسبة لقطرة المطر.

4.3 ـ تحقق من هذه النتيجة باستعمال معادلة الأبعاد.

حل

1 ـ سرعة قطرة المطر عند وصولها سطح الأرض

تخضع قطرة المطر لوزنها فقط، وبالتالي فهي في سقوط حر.

تسقط القطرة انطلاقا من النقطة O ، أصل معلم الفضاء، عند $t = 0$ بدون سرعة بدئية ومنه : $v_0 = 0$ و $z_0 = 0$

ـ المعادلات الزمنية للحركة في المعلم $(O, \vec{k})$:

$$a_z = g \quad , \quad v_z = gt \quad , \quad z = \frac{1}{2}gt^2$$

عندما تصل الكرية سطح الأرض، تكون قد قطعت المسافة $z = h$

ومنه : $h = \frac{1}{2}gt^2$ أي أن : $t = \sqrt{\frac{2.h}{g}}$

ـ سرعة الكرية عند وصولها سطح الأرض هي :

$$v = gt = g.\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2.g.h} = \sqrt{2.9,8.830} = 127,5m.s^{-1}$$

لمقارنة مقدارين نحسب نسبتهما

2 ـ مقارنة قيمتي دافعة أرخميدس ووزن القطرة.

$$\frac{p}{F_A} = \frac{mg}{\rho_a.V.g} = \frac{\rho_e V}{\rho_a.V} = \frac{\rho_e}{\rho_a} = \frac{10^3}{1,21} = 826,4$$

نلاحظ أن $\frac{p}{F_A} >> 1$ ، إذن، دافعة أرخميدس مهملة أمام وزن قطرة المطر.

3.1/3 ـ المعادلة التفاضلية للحركة

المجموعة المدروسة : قطرة المطر

القوى الخارجية المطبقة على القطرة

$\vec{P}$: وزن القطرة.

$\vec{f}$: قوة الاحتكاك المائع

للحصول على المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة، نطبق القانون الثاني لنيوتن

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب : $m.\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{f}$

أو
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - K.v.\vec{k}$$

ومنه :
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}v$$

3.2 ـ تعبير السرعة الحدية v_ℓ للقطرة

عندما تصل سرعة القطرة إلى قيمة حدية $v = v_\ell = cte$ فإن : $\frac{dv}{dt} = 0$

ومنه : $0 = g - \frac{K}{m}v_\ell$ أي أن : $v_\ell = \frac{g.m}{K}$

3.3 - حساب معامل الاحتكاك

لدينا : $K = \frac{mg}{v_\ell} = \frac{15.10^{-6}.9,8}{9,5} = 1,55.10^{-5}\,kg.s^{-1}$

3.4 - تعبير المعادلة التفاضلية

$\frac{dv}{dt} + \frac{K}{m}v = g$

يكتب حل هذه المعادلة على شكل : $v = Ae^{-\alpha.t} + B$

لدينا عند $t = 0$ ، $v(t = 0) = 0 = A + B$ ومنه : $A = -B$

إذن : $v(t) = A.(e^{-\alpha.t} - 1)$ و $\frac{dv}{dt} = -A.\alpha.e^{-\alpha.t}$

نعوض تعبيري $v(t)$ و $\frac{dv}{dt}$ في المعادلة التفاضلية فنحصل على :

$-A\alpha e^{-\alpha.t} + \frac{K}{m}A.(e^{-\alpha.t} - 1) = g$

ومنه : $Ae^{-\alpha.t}(\frac{K}{m} - \alpha) = g + \frac{K}{m}A$

تتحقق هذه المعادلة أيا كانت قيمة t، إذا كان $\frac{K}{m} - \alpha = 0$ ومنه : $\alpha = \frac{K}{m}$

وبالتالي : $g + \frac{K}{m}A = 0$ ومنه : $A = -\frac{g.m}{K} = -v_\ell$

إذن، حل المعادلة التفاضلية هو : $v(t) = v_\ell(1 - e^{-\frac{K}{m}t})$

للتحقق من أن تعبير $v(t)$ حل للمعادلة التفاضلية نشتق $v(t)$ ونعوض في المعادلة التفاضلية كلا من $v(t)$ و $\frac{dv}{dt}$

نحدد البرامترات بمقارنة حدي المتساوية المحصلة

4.1/4 - ثابتة الزمن لثنائي القطب RC

يعبر عن τ بالعلاقة : $\tau = RC$

تعبير $u(t)$: $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

4.2 - بمقارنة تعبير $u(t)$ و $v(t)$ ؛ نستنتج أن ثابتة الزمن بالنسبة لقطرة المطر هي : $\tau = \frac{m}{K} = \frac{15.10^{-6}}{1,55.10^{-5}} \approx 1s$

4.3 - التحقق من النتيجة المحصلة باستعمال معادلة الأبعاد :

حسب القانون الثاني لنيوتن : $[f] = [m][a] = [m].\frac{[v]}{[t]}$

لدينا : $[v] = \frac{L}{T} = L.T^{-1}$ إذن : $[f] = \frac{M.L.T^{-1}}{T} = M.L.T^{-2}$

نعلم أن : $f = K.v$ ومنه : $[K] = \frac{[f]}{[v]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L.T^{-1}} = M.T^{-1}$

$[\tau] = \frac{[m]}{[K]} = \frac{M}{M.T^{-1}} = T$

إذن، النسبة $\tau = \frac{m}{K}$ لها بعد زمني.