**تمرين 1** : حدد دالة أصلية للدالة $f$ في كل حالة مما يلي :

$f(x)=\frac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}+(2x+1)^4$ ، $f(x)=x\sqrt{x}$ ، $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ، $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}$ ، $f(x)=\frac{\text{Arctan}\, x}{1+x^2}$ ، $f(x)=\sin(5x+1)+\sin^3(x)$ ، $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

$f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ ، $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ ، $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ ، $f(x)=\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}$

**تمرين 2** : نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=x\sqrt{x+1}$

1) تحقق أن : $\forall x\in[-1;+\infty[\quad f(x)=(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}$

2) أوجد الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ والتي تنعدم في 0

**تمرين 3** : نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2$

1) حدد العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حيث : $\forall x\in IR\quad f(x)=\frac{a}{x^2+1}+\frac{bx}{(x^2+1)^2}$

2) أوجد الدالة الأصلية $F$ للدالة $f$ والتي تحقق : $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$

**تمرين 4** :

نعتبر الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ و لتكن $F$ الدالة الأصلية لـ $f$ والتي تنعدم في 0

1) بين أن $\forall x\in[0,+\infty[\quad F(x)\geq\frac{1}{2}x^2$

2) أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ و أول النتائج هندسيا

3) بين أن الدالة $F$ فردية

4) أوجد جدول تغيرات الدالة $F$

5) أوجد معادلة مماس الدالة $F$ في الصفر

6) حدد نقط انعطاف منحنى الدالة $F$

7) أنشئ في معلم متعامد ممنظم $(C_F)$ منحنى الدالة $F$

**تمرين 1 :**

لدينا : $f(x)=\frac{3}{x^2}+\sqrt[3]{x}+(2x+1)^4=-3\times\left(\frac{-1}{x^2}\right)+x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\times 2(2x+1)^4$

منه : $F(x)=-3\times\frac{1}{x}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}x^{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}(2x+1)^5$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{-3}{x}+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{10}(2x+1)^5}$

لدينا : $f(x)=x\sqrt{x}=x\times x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}$ منه : $F(x)=\frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}+1}=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}}$

لدينا : $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}=-\frac{-(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$ منه : $\boxed{F(x)=\frac{-1}{x^2+x+1}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x^2+2x+1+1}=\frac{1}{(x+1)^2+1}=\frac{(x+1)'}{(x+1)^2+1}$ منه : $\boxed{F(x)=\operatorname{Arctan}(x+1)}$

لدينا : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}=\frac{1}{2}\frac{(3+x^2)'}{\sqrt{3+x^2}}$ منه : $\boxed{F(x)=\sqrt{3+x^2}}$

لدينا : $f(x)=\frac{\operatorname{Arctan}x}{1+x^2}=\operatorname{Arctan}x\times\frac{1}{1+x^2}=\operatorname{Arctan}x\times(\operatorname{Arctan}x)'$ منه : $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}(\operatorname{Arctan}x)^2}$

لدينا :

$$f(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)\times\sin^2(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)\times(1-\cos^2(x))=\sin(5x+1)+\sin(x)-\sin(x)\cos^2(x)$$

$$f(x)=\sin(5x+1)+\sin(x)+\cos^2(x)\times(\cos(x))'$$

منه : $\boxed{F(x)=\frac{-1}{5}\cos(5x+1)-\cos(x)+\frac{1}{3}\cos^3(x)}$

لدينا : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{2}{2\sqrt{x}}$ منه : $F(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}}+2\sqrt{x}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}}$

لدينا : $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\times(x^2+1)'$ منه : $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(x^2+1)^{1+\frac{1}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

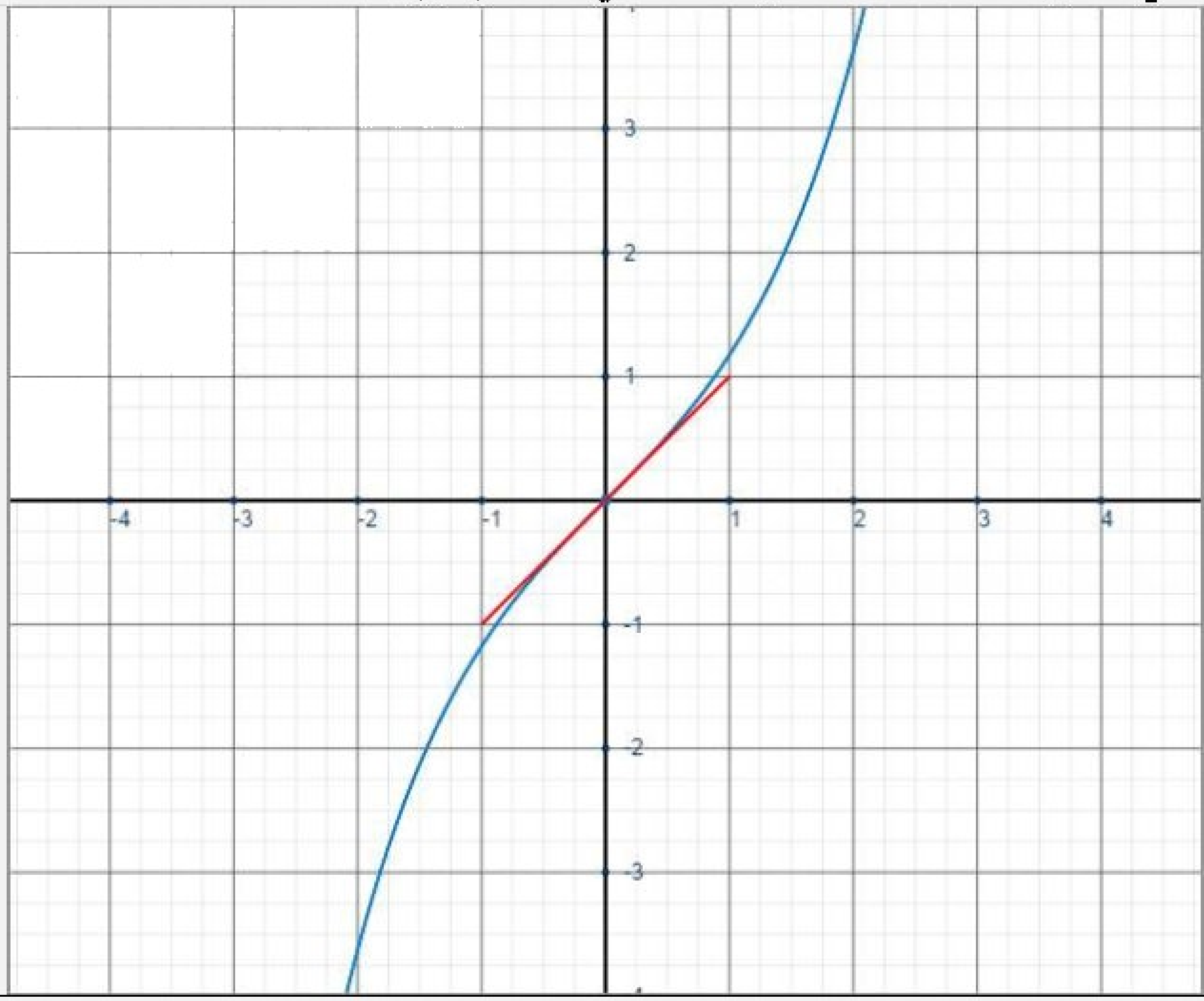
لدينا : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}=2\frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2}$ منه : $\boxed{F(x)=2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}$

لدينا : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2+1-1}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$ منه : $\boxed{F(x)=x-\operatorname{Arctan}(x)}$

لدينا : $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}\times\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{1+\sqrt{x}}\times(\sqrt{x})'$

منه : $F(x)=2\times\frac{1}{1+\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})^{1+\frac{1}{2}}$ أي : $\boxed{F(x)=\frac{4}{3}(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

| | |
|---|---|
| | **تمرين 2** : : $f(x)=x\sqrt{x+1}$ |
| 1 | لدينا : $\forall x\in[-1;+\infty[\ \ (x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=x\sqrt{x+1}=f(x)$ |
| 2 | بما أن : $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}$ فإن الدوال الأصلية للدالة $f$ هي على الشكل: $F(x)=\dfrac{1}{1+\frac{3}{2}}(x+1)^{1+\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}(x+1)^{1+\frac{1}{2}}+\lambda\ /\lambda\in IR$ <br> منه : $F(x)=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\lambda$ <br> و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة $f$ التي تنعدم في 0، إذن $F_0(0)=0$ منه: $\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\lambda=0$ <br> منه : $\lambda=\frac{-2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$ بالتالي : $\boxed{F_0(x)=\frac{2}{5}(x+1)^2\sqrt{x+1}-\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+\frac{4}{15}}$ |
| | **تمرين 3** : $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)^2$ |
| 1 | لدينا : $\forall x\in IR\ \ f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)^2=\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)^2}-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ <br> منه : $\boxed{a=1 \text{ و } b=-2}$ |
| 2 | الدوال الأصلية للدالة $f$ هي على الشكل: $F(x)=Arctan\,x+\dfrac{1}{x^2+1}+\lambda\ /\lambda\in IR$ <br> و لتكن $F_0(x)$ الدالة الأصلية للدالة $f$ التي تحقق $\lim\limits_{x\to+\infty}F_0(x)=0$ <br> منه : $\frac{\pi}{2}+0+\lambda=0$ منه : $\lambda=-\frac{\pi}{2}$ بالتالي: $\boxed{F_0(x)=Arctan\,x+\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{\pi}{2}}$ |
| | **تمرين 4** : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، $F$ الدالة الأصلية لـ $f$ والتي تنعدم في 0 |
| 1 | نعتبر الدالة العددية $h$ المعرفة على $IR$ بما يلي : $h(x)=F(x)-\frac{1}{2}x^2$ <br> لدينا : $\forall x\in IR\ \ \ h'(x)=f(x)-x=\sqrt{x^2+1}-x$ <br> وبما أن : $x^2+1>x^2$ فإن : $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}$ أي : $\sqrt{x^2+1}>\|x\|$ وحيث أن : $\forall x\in IR\ \|x\|\geq x$ <br> فإن : $\sqrt{x^2+1}>x$ ، مايعني أن : $h$ تزايدية قطعا على $IR$ <br> بالتالي : $x\geq 0\ \Rightarrow h(x)\geq h(0)=0$ بالتالي : $\forall x\in[0,+\infty[\ \ \ F(x)\geq\frac{1}{2}x^2$ |
| 2 | بما أن : $\forall x\in[0,+\infty[\ \ \ F(x)\geq\frac{1}{2}x^2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ <br> وبما أن : $\dfrac{F(x)}{x}\geq\frac{1}{2}x$ $\forall x\in[0,+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x=+\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}=+\infty$ <br> و هذا يعني أن منحنى الدالة $F$ يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب |
| 3 | نعتبر الدالة العددية $p$ المعرفة على $IR$ بما يلي : $p(x)=F(-x)+F(x)$ ، لدينا : <br> $\forall x\in IR\ \ p'(x)=(F(-x))'+(F(x))'=-F'(-x)+F'(x)=-f(-x)+f(x)=-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}=0$ <br> إذن: $p$ دالة ثابتة، إذن : $\exists C\in IR\ /\ \forall x\in IR\ p(x)=C$ منه : $\forall x\in IR\ F(-x)+F(x)=C$ <br> منه : $F(0)+F(0)=C$ إذن : $C=0$ و بالتالي : $\forall x\in IR\ F(-x)=-F(x)$ <br> وحيث أن : $x\in IR\Rightarrow -x\in IR$ فإن $F$ دالة فردية |

| | | |
|---|---|---|
| | بما أن: $F'(x) = f(x) > 0$ $\forall x \in IR$ فإن $F$ تزايدية قطعا على $IR$ . | 4 |
| | معادلة مماس الدالة $F$ في الصفر هي : $(\Delta):\ y = F'(0)(x-0) + F(0)$ أي : $(\Delta):\ y = f(0)x = x$ | 5 |
| | لدينا : $\forall x \in IR\ F''(x) = f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و حيث أن الشمتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها فتعدفي الصفر، فنقطة انعطاف منحنى الدالة $F$ هي النقطة $O(0\ ,\ 0)$ | 6 |
| |  | 7 |