

سلسلة 1	الدوال الأسية	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية
<p><b>تمرين 1:</b>            (1) حل في <math>\mathbb{R}</math> المعادلات: <math>2^x = 3^{1-2x}</math> ، <math>3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = 0</math> ، <math>e^{x^2-3x-3} = e</math> ، <math>e^{x-4} = 0</math> ، <math>e^{4x-3} = 1</math>            (2) حل في <math>\mathbb{R}</math> للمراجعات: <math>2e^{2x} - 3e^x + 1 &lt; 0</math> و <math>e^x - 2e^{-x} + 1 &gt; 0</math></p>		
<p><b>تمرين 2:</b> حدد <math>f'(x)</math> في كل حالة مما يلي دون تحديد مجموعة التعريف:  <math>f(x) = \ln(e^x + 1)</math> ، <math>f(x) = x^x</math> ، <math>f(x) = \ln(x) e^x</math> ، <math>f(x) = e^{x \ln(x)}</math> ، <math>f(x) = e^{e^x}</math></p>		
<p><b>تمرين 3:</b> احسب النهايات التالية:</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{e^x + 7}$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3}$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{ x } e^x$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^x$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \ln(x)$		
<p><b>تمرين 4:</b> نعتبر المتتالية المعرفة كما يلي: <math>\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases}</math> و نضع لكل <math>n \in \mathbb{N}</math> <math>v_n = \ln(u_n)</math></p> <p>(1) بين أن <math>v_n</math> هندسية ثم استنتج حساب <math>u_n</math> بدلالة <math>n</math>            (2) احسب <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n</math></p>		
<p><b>تمرين 5:</b> حدد دالة أصلية للدالة <math>f</math> في الحالات التالية:</p> $f(x) = (e^x + 1)^2$ ، $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ ، $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ، $f(x) = \frac{1 + e^x}{e^x}$ ، $f(x) = e^{3x+1}$ $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ ، $f(x) = \sqrt{e^x} + \sqrt[3]{e^x}$ ، $f(x) = \cos x e^{\sin x}$ ، $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$		

سلسلة 1	الدوال الأسية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية									
<b>تمرين 1 :</b>											
<p>لدينا : <math>x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{4x-3} = e^0 \Leftrightarrow e^{4x-3} = 1</math> ، منه : <math>S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}</math></p>											
<p><math>e^{x-4} = 0</math> منه : <math>S = \emptyset</math> ( لأن : <math>\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x-4} &gt; 0</math> )</p>											
<p>لدينا : <math>x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3} = e^1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3} = e</math></p>											
<p>منه : <math>\Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{3+5}{2} = 4</math> et <math>x_2 = \frac{3-5}{2} = -1</math> : <math>S = \{4; -1\}</math></p>											
<p><math>3e^{3x} - 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x (3e^{2x} - 2e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3(t)^2 - 2t - 1 = 0</math> ( لأن : <math>\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x &gt; 0</math> )</p>											
<p>نضع <math>e^x = t</math> منه : <math>3t^2 - 2t - 1 = 0</math> منه : <math>\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow t = \frac{2+4}{6} = 1</math> ou <math>t = \frac{2-4}{6} = \frac{-1}{3}</math></p>											
<p>منه : <math>e^x = 1</math> ou <math>e^x = \frac{-1}{3} &lt; 0</math> أي <math>e^x = e^0</math> ، بالتالي : <math>S = \{0\}</math></p>											
<p>التساويتان <math>e^x = 0</math> و <math>e^x = \frac{-1}{3}</math> غير ممكنتان ( لأن دالة الأس دائما موجبة قطعا ) ، لذلك تم تجاوزهما.</p>											
<p><math>2^x = 3^{1-2x} \Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln(3^{1-2x}) \Leftrightarrow x \ln(2) = (1-2x) \ln(3)</math> <math>\Leftrightarrow x \ln(2) = \ln(3) - 2 \ln(3) x \Leftrightarrow (\ln(2) + 2 \ln(3)) x = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)}{\ln(2) + 2 \ln(3)}</math></p>											
<p>بالتالي : <math>S = \left\{ \frac{\ln(3)}{\ln(2) + 2 \ln(3)} \right\}</math></p>											
<p>قد يبدو السؤال لا علاقة له بدالة الأس، لكن الأمر غير كذلك ، فالتكاتب <math>2^x</math> و <math>3^{1-2x}</math> هي مكتابة لدوال أسية ذات الأسس 2 و 3 على التوالي وهذا يعني أن <math>2^x &gt; 0</math> و <math>3^{1-2x} &gt; 0</math> وهذا ما سمح باستعمال دالة اللوغاريتم النبيري في طرفي للتساوية</p>											
<p><math>e^x - 2e^{-x} + 1 &gt; 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{2}{e^x} + 1 &gt; 0</math> <math>\Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 2 + e^x}{e^x} &gt; 0</math> لدينا : <math>\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 &gt; 0</math> نضع : <math>e^x = t</math> فنجد : <math>t^2 + t - 2 &lt; 0</math> <math>\Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow t = \frac{-1+3}{2} = 1</math> ou <math>t = \frac{-1-3}{2} = -2</math> <math>e^x - 2e^{-x} + 1 &gt; 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 2) &gt; 0</math> <math>\Leftrightarrow (e^x - 1) &gt; 0</math> <math>\Leftrightarrow e^x &gt; 1 \Leftrightarrow x &gt; 0</math> بالتالي : <math>S = ]0, +\infty[</math></p>	<p>لحل المتراجحة <math>2e^{2x} - 3e^x + 1 &lt; 0</math> نضع : <math>e^x = t</math> فنجد : <math>2t^2 - 3t + 1 &lt; 0</math> <math>\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow t = \frac{3+1}{4} = 1</math> ou <math>t = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}</math></p> <table border="1" data-bbox="1092 2136 1890 2344"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>\frac{1}{2}</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>x^2 - 3</math></td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> </tr> </table> <p>منه : <math>t \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[</math> أي <math>\frac{1}{2} &lt; t &lt; 1</math> أي : <math>\frac{1}{2} &lt; e^x &lt; 1</math> أي : <math>\ln\left(\frac{1}{2}\right) &lt; x &lt; \ln(1)</math> أي : <math>-\ln(2) &lt; x &lt; 0</math> بالتالي : <math>S = ]-\ln(2), 0[</math></p>	$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$	$x^2 - 3$	+	-	-	+
$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$							
$x^2 - 3$	+	-	-	+							
<p>في المتراجحة الثانية استعملنا طريقة التعميل لكننا سنحصل على عامل موجب <math>e^x + 2</math> مما يسمح ببيع الوقت.</p>											

**تمرين 2 :**

$$f(x) = e^{x+\ln(x)}$$

$$f'(x) = (e^{x+\ln(x)})' = (x+\ln(x))' e^{x+\ln(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x+\ln(x)}$$

$$f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = (e^{5x})' = (5x)' e^{5x} = 5 e^{5x}$$

$$f(x) = \ln(e^x + 1)$$

$$f'(x) = (\ln(e^x + 1))' = \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$f(x) = \ln(x) e^x$$

$$f'(x) = (\ln(x) e^x)' = (\ln(x))' e^x + \ln(x)(e^x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} e^x + \ln(x) e^x = \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right) e^x$$

$$f(x) = x^x$$

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{\ln(x^x)})' = (e^{x \ln(x)})' = (x \ln(x))' e^{x \ln(x)} = (x' \ln(x) + x(\ln(x))') e^{x \ln(x)} = (\ln(x) + 1) e^{x \ln(x)}$$

لا يمكننا في هذا المثال الاشتقاق باستعمال القاعدة  $(x^r)' = r x^{r-1}$  ، لكون الأس متغير وليس بعدد ثابت، لذلك وجب علينا تغيير صيغة الدالة لإيجاد الخاصية المناسبة للاشتقاق

**تمرين 3 :** احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x|} e^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{-t} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} \times \frac{1}{\sqrt{t}} = 0 \times 0 = 0$$

نضع  $t = -x$  إذن :

بصفة عامة عند حساب نهاية لنوات أسية عند  $-\infty$  وعند الحصول على شكل غير معد يستحسن استعمال تغيير للتغير  $t = -x$  ، وذلك لكونه يعول النهاية لـ  $+\infty$  وهو ما يسمح باستغلال أهم النهايات الخاصة للنوات الأسية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

هذه النهاية الخاصة لم استعمال مقابليها ، أي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$  حيث  $n=1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{0+x}{0+7} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{e^x + 7} = -\infty$$

مثال سهل، لكن الهدف منه أن نتعلم عدم تجاوز مرحلة التعويض قبل أية محاولة للتعميل أو ما شابه.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x}} = (1 \times 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - e^x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^x = 1^0 = 1$$

لا يصبح التعويض بالطريقة،

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x+1)} = e^{0 \times 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{\ln(t^t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{t \ln(t)} = e^{2 \times 0} = 1$$

نضع  $\sqrt{x} = t$  ، منه  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x} \ln(x)}$

$$v_n = \ln(u_n) \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases} \quad \text{تمرين 4}$$

لدينا:  $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^3) = 3 \ln(u_n) = 3v_n$  ، إذن:  $v_n$  متتالية هندسية أساسها  $q=3$

$$v_n = v_0 q^n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n \quad \text{منه} \quad v_0 = \ln(u_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$u_n = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n} = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3^n} \quad \text{بالتالي} \quad \ln(u_n) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) 3^n$$

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) 3^n = -\infty$  لأن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  و  $-\ln(2) < 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(-\ln(2) 3^n) = 0 \quad \text{منه}$$

تمرين 5:

الدالة الأصلية	الدالة
$F(x) = \frac{1}{3} e^{3x+1}$	$f(x) = e^{3x+1}$
$f(x) = \frac{1}{e^x} + 1 = e^{-x} + 1 \Rightarrow F(x) = -e^{-x} + x = \frac{-1}{e^x} + x$	$f(x) = \frac{1+e^x}{e^x}$
$f(x) = \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)} \Rightarrow F(x) = \ln(e^x+1)$	$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$
$f(x) = \frac{(e^x)'}{(e^x)^2+1} \Rightarrow F(x) = \text{Arctan}(e^x)$	$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$
$f(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x + x$	$f(x) = (e^x+1)^2$
$f(x) = \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow F(x) = x - \ln(e^x+1)$	$f(x) = \frac{1}{e^x+1}$
$f(x) = (\sin x)' e^{\sin x} \Rightarrow F(x) = e^{\sin x}$	$f(x) = \cos x e^{\sin x}$
$f(x) = \sqrt{e^x} + \sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{3}x} \Rightarrow F(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} + 3e^{\frac{1}{3}x} = 2\sqrt{e^x} + 3\sqrt[3]{e^x}$	$f(x) = \sqrt{e^x} + \sqrt[3]{e^x}$
$f(x) = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = 2 e^{\sqrt{x}}$	$f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

لم يطلب منا تحديد جميع الدوال الأصلية، لذلك إضافة الثابتة ليس ضروريا

الدالة الأصلية للدالة  $e^{ax+b}$  هي  $\frac{1}{a} e^{ax+b}$  حيث  $a$  و  $b$  عدلان حقيقيان ثابتان و  $a \neq 0$

الدالة الأصلية للدالة  $e^{u(x)}$  هي  $(u(x))' e^{u(x)}$

الدالة الأصلية للدالة  $\frac{(u(x))'}{u(x)}$  هي  $\ln|u(x)|$  ، الدالة الأصلية للدالة  $\frac{(u(x))'}{u^2(x)+1}$  هي  $\text{Arctan}(u(x))$