الأعداد العقدية

تمرين1

حدد الشكل الجبري ل z

أ- $z=\dfrac{2-3i}{4+5i}$ ب- $z=(1-i\sqrt{3})^3$ ج- $z=(1-i)^{12}$

الحل

ج-

$$z=(1-i)^{12}$$
$$=\left((1-i)^2\right)^6$$
$$=(-2i)^6$$
$$\boxed{z=-64}$$

تمرين2

حل في $\mathbb{C}$ **:** أ- $3\overline{z}-2iz=1+2i$ ب- $3\overline{z}+5iz\in\mathbb{R}$

ج- $3\overline{z}+5iz\in i\mathbb{R}$ د- $1-(1+i)z+iz^2\in i\mathbb{R}$

الحل

نعتبر : $z=x+iy$

أ- $3\overline{z}-2iz=1+2i$

$$3\overline{z}-2iz=1+2i \Leftrightarrow (3x-2y)+(-2x-3y)i=1+2i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x-2y=1\\ -2x-3y=2\end{cases}$$

نجد : $z=-\dfrac{1}{13}-\dfrac{8}{13}i$

ب- $3\overline{z}+5iz\in\mathbb{R}$

$$3\overline{z}+5iz\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left((3x-5y)+(5x-3y)i\right)\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 5x-3y=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{5}{3}x$$
$$\boxed{S=\left\{x+\frac{5}{3}xi\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y=\dfrac{5}{3}x$

ج- $3\overline{z}+5iz\in i\mathbb{R}$

$$3\overline{z}+5iz\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left((3x-5y)+(5x-3y)i\right)\in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 3x-5y=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{5}x$$
$$\boxed{S=\left\{x+\frac{3}{5}xi\ /\ x\in\mathbb{R}\right\}}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y=\dfrac{3}{5}x$

د- $1-(1+i)z+iz^2\in i\mathbb{R}$

$$1-(1+i)z+iz^2\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow(1-x+y-2xy)-i\left(x+y-x^2+y^2\right)\in i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow 1-x+y-2xy=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{x-1}{2x-1}\ ;x\neq\frac{1}{2}$$
$$\boxed{z=x+\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)i}$$

هندسيا الحل هو الهذلول الذي معادلته : $y=\dfrac{x-1}{2x-1}$

مركزه : $\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ **مقارباه :** $x=\dfrac{1}{2}$ **و** $y=\dfrac{1}{2}$

تذكير :

- **المنحنى الممثل للدالة** $f(x)=ax^2+bx+c$ " $a\neq 0$ "

شلجم رأسه $\Omega\left(\dfrac{-b}{2a};f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ **و محوره المستقيم** $x=\dfrac{-b}{2a}$

- **المنحنى الممثل للدالة**

" $ad-bc \neq 0 \; ; x \neq -\frac{d}{c} ; c \neq 0$ " $\quad f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

هذلول رأسه $\Omega\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ و و مقارباه

المستقيم $x=-\frac{d}{c}$ و المستقيم $y=\frac{a}{c}$

تمرين3

لحق M هو Z : في كل حالة حدد مجموعة النقط **E** بحيث

أ- $|z-3+2i|=2$ ب- $|z-2|=|z+3-4i|$

ج- $|z-1|=2|z+1|$ د- $(z-3+2i)(\overline{z}-3-2i)=25$

هـ- $Argz\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ و- $Arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

ز- $Argz\equiv Arg(z+2i)[2\pi]$

الحل

أ- تحديد : $E=\{M\in(P)/|z-3+2i|=2\}$

نعتبر : $A(3;-2)$ إذن $Z_A=3-2i$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\{M\in(P)/|z-3+2i|=2\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|=2\}$$
$$=\{M\in(P)/AM=2\}$$

و منه : $\boxed{E=\mathscr{C}(A;2)}$

ب- تحديد : $E=\{M\in(P)/|z-2|=|z+3-4i|\}$

نعتبر : $A(2;0)$ إذن $Z_A=2$

و : $B(-3;4)$ إذن $Z_B=-3+4i$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\{M\in(P)/|z-2|=|z+3-4i|\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|=|Z_M-Z_B|\}$$
$$=\{M\in(P)/AM=BM\}$$

و منه : $\boxed{E=[AB] \text{ واسط}}$

ج- $|z-1|=2|z+1|$

$$|z-1|=2|z+1|\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=4(x+1)^2+4y^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+10x+3=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$$

و منه : $\boxed{E=\mathscr{C}\left(A\left(\frac{5}{3};0\right);\frac{4}{3}\right)}$

د- $(z-3+2i)(\overline{z}-3-2i)=25$

نعتبر : $A(3;-2)$ إذن $Z_A=3-2i$

$$E=\{M\in(P)/(z-3+2i)(\overline{z}-3-2i)=25\}$$
$$=\{M\in(P)/(Z_M-Z_A)=(\overline{Z_M}-\overline{Z_A})\}$$
$$E=\{M\in(P)/(Z_M-Z_A)\overline{(Z_M-Z_A)}=25\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|^2=25\}$$
$$=\{M\in(P)/|Z_M-Z_A|=5\}$$
$$=\{M\in(P)/AM=5\}$$

و منه : $\boxed{E=\mathscr{C}(A;5)}$

هـ- $Argz\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

تحديد : $E=\left\{M\in(P)/Argz\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$

نعتبر : $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ إذن $Argz_A\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\left\{M\in(P)/Argz\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$$
$$=\{M\in(P)/ArgZ_M\equiv ArgZ_A[2\pi]\}$$
$$=\{M\in(P)/ArgZ_M-ArgZ_A\equiv 0[2\pi]\}$$
$$=\left\{M\in(P)/Arg\left(\frac{Z_M}{Z_A}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$=\left\{M\in(P)/\overline{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})}\equiv 0[2\pi]\right\}$$
$$=\{M\in(P)/M\in[OA[-\{O\}\}$$

و منه : $\boxed{E=[OA)-\{O\}}$

و- $Arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

نعتبر : $A(1;1)$ إذن $Argz_A\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

و : $B(2;0)$ إذن $Z_B=2$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\left\{M\in(P)/Arg(z-2)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$$

$$=\left\{M\in(P)/Arg(Z_M-Z_B)\equiv ArgZ_A[2\pi]\right\}$$

$$=\left\{M\in(P)/Arg(Z_M-Z_B)-ArgZ_A\equiv 0[2\pi]\right\}$$

$$E=\left\{M\in(P)/Arg\left(\frac{Z_M-Z_B}{Z_A-Z_0}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$

$$=\left\{M\in(P)/\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BM}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$

M تنتمي إلى نصف المستقيم : $D\left(B,\overrightarrow{OA}\right)$ بحيث $M\neq B$

نعتبر : C بحيث : $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ إذن : $C(3;1)$

و منه : $\boxed{E=[BC)-\{B\}}$

ز- $Argz\equiv Arg(z+2i)[2\pi]$

نعتبر : $A(0;-2)$ إذن $Z_B=-2i$

لدينا : $Z_M=Z$

$$E=\left\{M\in(P)/Argz\equiv Arg(z+2i)[2\pi]\right\}$$

$$=\left\{M\in(P)/ArgZ_M\equiv Arg(Z_M-Z_A)[2\pi]\right\}$$

$$=\left\{M\in(P)/Arg\left(\frac{Z_M}{Z_M-Z_A}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$

$$E=\left\{M\in(P)/\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{OM}\right)\equiv 0[2\pi]\right\}$$

$$M\in(AO)-[AO]$$

و منه :

$\boxed{E=(AO)-[AO]}$

تمرين4

حدد الشكل المثلثي ل : Z

أ- $Z=\frac{2+2\sqrt{3}i}{3-3i}$

ب- $Z=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ ؛ $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

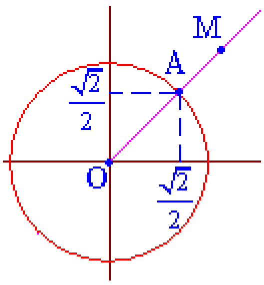
ج- $Z=\frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]\left[5;-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[1;\frac{\pi}{2}\right]}$

الحل

أ- $Z=\frac{2+2\sqrt{3}i}{3-3i}=\frac{\left[4;\frac{\pi}{3}\right]}{\left[3\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]}$

$\boxed{Z=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};\frac{7\pi}{12}\right]}$

ب-



$$Z=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$Z=\frac{[1;\theta]}{[1;-\theta]}$$

$\boxed{Z=[1;2\theta]}$

ج- $Z=\frac{\left[2;\frac{\pi}{3}\right]\left[5;-\frac{\pi}{4}\right]}{\left[1;\frac{\pi}{2}\right]}$

$\boxed{Z=\left[10;-\frac{5\pi}{12}\right]}$

تمرين5

$L(3;4)\ ;\ F(2;1)\ ;\ A(4;3)$

اعط قياسا ل : $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AL})$

استنتج : طبيعة المثلث AFL

الحل

$$(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AL})\equiv Arg\frac{Z_L-Z_A}{Z_F-Z_A}[2\pi]$$

$$\frac{Z_L-Z_A}{Z_F-Z_A}=\frac{-1+i}{-2-2}$$

$$=\frac{\left[\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right]}{\left[2\sqrt{2};\frac{-3\pi}{4}\right]}$$

$$\frac{Z_L-Z_A}{Z_F-Z_A}=\left[\frac{1}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$$

إذن : $(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AL})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

تمرين6

نقط من المستوى العقدي ألحاقها $C;B;A$

$Z_c=3\ ;\ Z_B=2i\ ;\ Z_A=6-2i$

بين أن : $C;B;A$ نقط مستقيمية

الحل

$$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\equiv Arg\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}[2\pi]$$

$$\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=\frac{-3+2i}{3-2i}$$

$$\boxed{\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}=-1}$$

بما أن : $\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\in\mathbb{R}$

فإن : $C;B;A$ نقط مستقيمية

تمرين7

معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

E ;F G ثلاثة نقط ألحاقها $Z_F=6$ ، $Z_E=6-i2\sqrt{3}$

$Z_G=-i2\sqrt{3}$

-1 احسب FG

-2 اعط قياسا ل : $(\vec{e_1};\overrightarrow{OE})$ ، $(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG})$

-3 $\vec{u}(2;2)$ لحقها $Z_{\vec{u}}$ ، $\vec{v}(0;\sqrt{2})$ لحقها $Z_{\vec{v}}$

اعط قياسا ل $(\vec{u};\vec{v})$

الحل

-1 $\boxed{GF=4\sqrt{3}}$

-2 $(\vec{e_1};\overrightarrow{OE})\equiv ArgZ_E\ [2\pi]$

$$Z_E=\left[4\sqrt{3};-\frac{\pi}{6}\right]$$

إذن: $\boxed{(\vec{e_1};\overrightarrow{OE})\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]}$

$$(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG})\equiv Arg\frac{Z_G-Z_E}{Z_F-Z_E}[2\pi]$$

$$\frac{Z_G-Z_E}{Z_F-Z_E}=\sqrt{3}i=\left[\sqrt{3};\frac{\pi}{2}\right]$$

إذن : $\boxed{(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EG})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]}$

-3 $(\vec{u};\vec{v})\equiv Arg\frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}[2\pi]$

$$\frac{Z_{\vec{v}}}{Z_{\vec{u}}}=\frac{\sqrt{2}}{2+2i}=\left[1;-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\boxed{(\vec{u};\vec{v})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]}$$

تمرين8

اكتب بدلالة : $\cos\theta$ و $\sin\theta$ ما يلي :

- 1 $\cos 5\theta$ -2 $\sin 5\theta$

الحل

$$\cos 5\theta+i\sin 5\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^5$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\cos 5\theta=\cos^5\theta-\cos^3\theta\sin^2\theta+\cos\theta\sin^4\theta\\ \sin 5\theta=\cos^4\theta\sin\theta-\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta\end{array}}$$

تمرين9

خطط ما يلي :

- 1 $A=\cos^8 x\sin x$ -2 $B=2^{2n}\cos^{2n}x$

الحل

- 1 $A=\cos^7 x\sin^2 x$

$$A = \cos^8 x \sin x$$

$$= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^8 \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2^9 i}\sum_{k=0}^{8} C_8^k e^{ikx} e^{-i(8-k)x}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^9 i}\sum_{k=0}^{8} C_8^k e^{i(2k-8)x}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^9 i}\left(\sum_{k=0}^{8} C_8^k e^{i(2k-7)x} - \sum_{k=0}^{8} C_8^k e^{i(2k-9)x}\right)$$

$$= \frac{2i}{2^9 i}\sum_{k=0}^{8} C_8^k \sin\left((2k-7)x\right)$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2^8}\sum_{k=0}^{8} C_8^k \sin\left((2k-7)x\right)}$$

-2 $B = 2^{2n}\cos^{2n} x$

$$B = 2^{2n}\cos^{2n} x$$

$$= 2^{2n}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C_n^k e^{ikx} e^{-i(2n-k)x}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x}$$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x} + \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x} + C_{2n}^n$$

نعوض k ب $2n-k$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k e^{i(2k-2n)x} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2n-k} e^{-i(2k-2n)x} + C_{2n}^n$$

$$\boxed{B = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos(2k-2n) + C_{2n}^n}$$

تمرين10

$$a = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

أ - حدد الشكل الأسي والجبري ل a

ب- استنتج $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

الحل

أ - تحديد الشكل الأسي :

$$a = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

$$a = e^{-i\pi}\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}$$

$$\boxed{a = e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$$

- تحديد الشكل الجبري:

$$a = -\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

$$\boxed{a = \frac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4} + i\,\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}}$$

ب- من أ :

$$\cos\frac{-11\pi}{12} = -\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$$

$$\sin\frac{-11\pi}{12} = \frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$$

إذن $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$ $\boxed{\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}}$

تمرين11

حدد الشكل المثلثي لحلول المعادلة : $Z^4 = 8(1-i\sqrt{3})$

الحل

أ- تحديد الشكل الأسي لحلول المعادلة (E)

$$Z^4 = 8(1+i\sqrt{3})$$

$$\boxed{Z^4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4}$$

و منه : $Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو

$Z = -2e^{i\frac{\pi}{12}}$

أو $Z = 2ie^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $Z = -2ie^{i\frac{\pi}{12}}$

إذن : : $Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $Z = 2e^{-i\pi}e^{i\frac{\pi}{12}}$

أو $Z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ أو $Z = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$

و منه : $\boxed{Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}}$ أو $\boxed{Z = 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$

أو $\boxed{Z = 2e^{i\frac{7\pi}{12}}}$ أو $\boxed{Z = 2e^{-i\frac{5\pi}{12}}}$

تمرين12

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

-1 $5Z^2 - 3Z + 1 = 0$

-2 $Z^2 - (3+i)Z + 2 = 0$

-3 $iZ^2 - (3-i)Z - 2i = 0$

-4 $Z^2-(2-i)Z-\frac{5}{2}i=0$

الحل

-1 $5Z^2-3Z+1=0$

$\Delta'=-11=\left(i\sqrt{11}\right)^2$

$z=\frac{3-\sqrt{11}i}{10}$ أو $z=\frac{3+\sqrt{11}i}{10}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{3+\sqrt{11}i}{10};\frac{3-\sqrt{11}i}{10}\right\}}$$

-2 $Z^2-(3+i)Z+2=0$

$\Delta=6i=\left(\sqrt{3}(1+i)\right)^2$

$z=\frac{(3+i)-\sqrt{3}(1+i)}{2}$ أو $z=\frac{(3+i)+\sqrt{3}(1+i)}{2}$

$z=\frac{(3-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{2}$ أو $z=\frac{(3+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{(3+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2};\frac{(3-\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i}{2}\right\}}$$

-3 $iZ^2-(3-i)Z-2i=0$

$\Delta=-6i=\left(\sqrt{3}(1-i)\right)^2$

$z=\frac{(3-i)-\sqrt{3}(1-i)}{2i}$ أو $z=\frac{(3-i)+\sqrt{3}(1-i)}{2i}$

$z=\frac{(-1+\sqrt{3})+(-3+\sqrt{3})i}{2}$ أو $z=\frac{-(1+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})i}{2}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{-(1+\sqrt{3})-(3+\sqrt{3})i}{2};\frac{(-1+\sqrt{3})+(-3+\sqrt{3})i}{2}\right\}}$$

-4 $Z^2-(2-i)Z-\frac{5}{2}i=0$

$\Delta=3+6i$

نعتبر : $\Delta=\delta^2\ ;\ \delta=a+ib$

إذن : $|\Delta|=|\delta|^2$ و منه : $a^2+b^2=3\sqrt{5}$

$3+6i=(a^2-b^2)+2abi$

$$\begin{cases}a^2-b^2=3\\ ab=3\\ a^2+b^2=3\sqrt{5}\end{cases}$$ إذن : $$\begin{cases}a^2=\frac{3\sqrt{5}+3}{2}\\ ab=3\\ b^2=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}\end{cases}$$

و منه : $$\begin{cases}a=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\\ b=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\end{cases}$$ أو $$\begin{cases}a=-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\\ b=-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\end{cases}$$

إذن : $\delta=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}$

$$z=\frac{(2-i)+\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)}{2}$$

أو

$$z=\frac{(2-i)-\left(\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}+i\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)}{2}$$

إذن : $$\boxed{z=\frac{\left(2+\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\right)+\left(-1+\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)i}{2}}$$

أو

$$\boxed{z=\frac{\left(2-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+3}{2}}\right)+\left(-1-\sqrt{\frac{3\sqrt{5}-3}{2}}\right)i}{2}}$$

تمرين 13

$P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

أ- بين أن $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يجب تحديده

ب- حل في $\mathbb{C}$: $P(Z)=0$

الحل

أ-لنبين أن $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا

نعتبر : $z_0=ib$

$$P(z_0)=0\Leftrightarrow(ib)^3-(16-i)(ib)^2+(89-16i)ib+89i=0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2+16b+i\left(-b^3-b^2+89b+89\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16b^2+16b=0\\ -b^3-b^2+89b+89=0\end{cases}$$

$$\boxed{P(z_0)=0\Leftrightarrow b=-1}$$

و منه : $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0=-i$

ب- حل المعادلة $P(Z)=0$ في $\mathbb{C}$:

بما أن : $-i$ جدر ل $P(Z)$ فإن :

$$P(Z)=(z+i)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$$

$$P(Z)=z^3+(i+\alpha)z^2+(\alpha i+\beta)z+\beta i$$

و بما أن :

$$P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$$

فإن : $\boxed{\alpha=-16}$ و $\boxed{\beta=89}$

و منه : $P(Z)=(z+i)(z^2-16z+89)$

حل المعادلة : $z^2-16z+89=0$

نجد : $\Delta=-100$ $z=8-5i$ او $z=8+5i$

و منه : $\boxed{z=8-5i \text{ او } z=8+5i \text{ أو}}$

$$\boxed{P(Z)=0 \Leftrightarrow z=-i}$$

تمرين 14

حل في $\mathbb{C}$:

-1 $(E_1): z^9+\dfrac{1}{\overline{z}^3}=0$

-2 $(E_2): z^n=\overline{z}\ ;\ n\geq 2$

الحل

-1 $(E_1): z^9+\dfrac{1}{\overline{z}^3}=0$

لدينا : $z\neq 0$ نعتبر : $z=re^{i\theta}$

$$(E_1)\Leftrightarrow z^9+\frac{1}{\overline{z}^3}=0$$

$$\Leftrightarrow r^9e^{i9\theta}=\frac{e^{i\pi}}{r^3e^{-i3\theta}}$$

$$\Leftrightarrow r^{12}e^{i6\theta}=e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow r^{12}=1\ ;\ 6\theta\equiv\pi[2k\pi]\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r=1\ ;\ \theta=\frac{(2k+1)\pi}{6}\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$(E_1)\Leftrightarrow z=e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}i}\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\boxed{z\in\left\{e^{\frac{2k\pi}{5}}\ /\ k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}}$$

-2 $(E_2): z^n=\overline{z}\ ;\ n\geq 2$

لدينا : $z=0$ تحقق (E_2)

إذا كان : $z\neq 0$ نعتبر : $z=re^{i\theta}$

$$(E_2)\Leftrightarrow z^n=\overline{z}$$

$$\Leftrightarrow r^ne^{in\theta}=re^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow r^{n-1}e^{i(n+1)\theta}=1$$

$$\Leftrightarrow r^{n-1}=1\ ;\ e^{i(n+1)\theta}=1$$

$$\Leftrightarrow r=1\ ;\ \theta\equiv\frac{2k\pi}{n+1}\quad k\in\{0;1;\cdots;n\}$$

$$(E_2)\Leftrightarrow z=e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}\quad k\in\{0;1;\cdots;n\}$$

$$\boxed{z\in\left\{e^{\frac{2k\pi}{n+1}}\ /\ k\in\{0;1;\cdots;n\}\right\}\cup\{0\}}$$

تمرين 15

$Z_A=7+8i$ حدد الكتابة الجبرية ل $Z_{A'}$ في كل حالة

أ- A' صورة A بالإزاحة t التي متجهتها $\vec{u}$:

$Z_{\vec{u}}=-3+10i$

ب- A' صورة A التحاكي h الذي مركزه Ω : ونسبته $\dfrac{3}{7}$

$Z_\Omega=-3+7i$

ج- A' صورة A الدوران r الذي مركزه Ω وزاويته $\dfrac{\pi}{3}$

$Z_\Omega=-3+7i$

الحل

أ- $t_{\vec{u}}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=z_A+z_{\vec{u}}$

$$\Leftrightarrow z_{A'}=(7+8i)+(-3+10i)$$

$$\boxed{t_{\vec{u}}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=4+18i}$$

ب- $h_{(\Omega;k)}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=kz_A+z_\Omega(1-k)$

$$\Leftrightarrow z_{A'}=\frac{3}{7}(7+8i)+(-3+7i)\left(1-\frac{3}{7}\right)$$

$$\boxed{h_{(\Omega;k)}(A)=A'\Leftrightarrow z_{A'}=\frac{9}{7}+\frac{52}{7}i}$$

ج- $r(z_A)=z_{A'}\Leftrightarrow z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A-z_\Omega)+z_\Omega$

$$r(z_A)=z_{A'}\Leftrightarrow z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{3}}\left((7+8i)-(-3+7i)\right)+(-3+7i)$$

$$\boxed{r(z_A)=z_{A'}\Leftrightarrow z_{A'}=\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{15}{2}+5\sqrt{3}\right)i}$$

تمرين 16

φ تحويل بحيث : $\varphi(z)=z'$

حدد φ في كل حالة

-1 $z'=z-5+2i$ -2 $z'=3z-2+5i$

-3 $z'=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-2+3i$

-4 $z'=(\sqrt{3}-i)z+1-3i$

الحل

$z'=az+b$

-1 $z'=z-5+2i$

φ إزاحة متجهتها $\vec{u}(-5+2i)$

-2 $z'=3z-2+5i$

φ تحاك مركزه $\Omega(2-5i)$ ونسبته 3

-3 $z' = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z - 2 + 3i$

$$\frac{b}{1-a} = \frac{-2+3i}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

φ دوران مركزه $\Omega\left(\frac{-2+3i}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)$ و قياس زاويته $\frac{2\pi}{3}$

-4 $z' = \left(\sqrt{3}-i\right)z + 1 - 3i$

$$|a| = 2 \quad \frac{b}{1-a} = \frac{1-3i}{\left(1-\sqrt{3}\right)+i}$$

حيث : $\varphi = r\circ h = h\circ r$

h هو التحاكي الذي مركزه $\Omega\left(\frac{1-3i}{\left(1-\sqrt{3}\right)+i}\right)$ ونسبته 2

و r هو الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و قياس زاويته $-\frac{\pi}{6}$

تمرين 17

$$\theta\in[0;\pi];\quad (E): z^2+2(1-\cos\theta)z+2(1-\cos\theta)=0$$

حدد الكتابة الجبرية والأسية ل $z_1 ; z_2$ حلي المعادلة (E)

الحل

$$\theta\in[0;\pi];\quad (E): z^2+2(1-\cos\theta)z+2(1-\cos\theta)=0$$

$$\Delta' = (1-\cos\theta)^2 - 2(1-\cos\theta)$$

$$\Delta' = -\sin^2\theta$$

بما أن : $\theta\in[0;\pi]$ فإن : $\sin\theta\geq 0$

إذن : $\Delta' = (i\sin\theta)^2$

$$z_2 = (-1+\cos\theta) - i\sin\theta \;;\; z_1 = (-1+\cos\theta)+i\sin\theta$$

$$z_2 = -1+e^{-i\theta} \;;\; z_1 = -1+e^{+i\theta}$$

$$z_2 = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(-e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) \;;\; z_1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$z_2 = -2i\sin\theta e^{-i\frac{\theta}{2}} \;;\; z_1 = 2i\sin\theta e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{z_2 = 2\sin\theta e^{\left(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)i}} \qquad \boxed{z_1 = 2\sin\theta e^{\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)i}}$$

تمرين 18

بين أن : $y\in\mathbb{R} ;\; Arg(1+iy)\equiv\arctan(y)[\pi]$

الحل

نعتبر : $1+iy = re^{i\theta}$

$$1+iy = \sqrt{1+y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}i\right)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \;;\; \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

إذن : $\tan\theta = y \Leftrightarrow \tan\theta = \tan(\arctan y)$

$$\Leftrightarrow \theta\equiv\arctan y\,[\pi]$$

و منه : $\boxed{Arg(1+iy)\equiv\arctan(y)[\pi]}$

تمرين 19

$$\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} \,/\, |z|=1\}$$

-1 بين أن : $z\neq 1 ;\; i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\in\mathbb{R}$

-2 بين أن : $\left|\frac{z-z'}{1-\bar{z}z'}\right| = 1 ;\; \forall z\in\mathbb{U}-\{1\} ;\; \forall z'\in\mathbb{C} ;\; z\neq z'$

-3 بين أن : $\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R} ;\; \forall(z,z')\in\mathbb{U}^2$

-4 حدد معيار وعمدة : $z+1\;(z\neq-1);\; z-1\;(z\neq 1);\; z\in\mathbb{U}$

-5 استنتج معيار وعمدة : $\frac{z-1}{z+1}\quad z\in\mathbb{U};(z\neq 1; z\neq -1)$

-6 حدد معيار وعمدة

$$z+z'\;(z\neq -z') \;;\; z-z'\;(z\neq z') \;;\; (z,z')\in\mathbb{U}^2$$

الحل

$$\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C} \,/\, |z|=1\}$$

بما أن : $|z|=1$

فإن : $z\bar{z}=1$

-1 لنبين أن : $z\neq 1 ;\; i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\in\mathbb{R}$

$$\overline{i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = -i\left(\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)$$

$$= -i\left(\frac{1+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

$$= -i\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\boxed{\overline{i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

إذن : $\boxed{i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\in\mathbb{R}}$

2- لنبين أن: $\left|\frac{z-z'}{1-\bar{z}z'}\right|=1$; $\forall z\in\mathbb{U}-\{1\}$; $\forall z'\in\mathbb{C}$; $z\neq z'$

$$\left|\frac{z-z'}{1-\bar{z}z'}\right|=\left|\frac{z-z'}{1-\frac{1}{z}z'}\right|$$

$$=|z|\left|\frac{z-z'}{z-z'}\right|$$

$$\left|\frac{z-z'}{1-\bar{z}z'}\right|=|z|$$

إذن: $\boxed{\left|\frac{z-z'}{1-\bar{z}z'}\right|=1}$

3- لنبين أن: $\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$; $\forall(z,z')\in\mathbb{U}^2$

$$\overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)}=\frac{\bar{z}+\bar{z}'}{1+\overline{zz'}}=\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{z'}}{1-\frac{1}{zz'}}=\frac{z+z'}{1+zz'}$$

إذن: $\boxed{\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}}$

4- تحديد معيار وعمدة: $z+1$; $(z\neq-1)$ $z-1$; $(z\neq1)$ $z\in\mathbb{U}$;

نعتبر: $z=e^{i\theta}$

$$z+1=e^{i\theta}+1$$

$$=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\boxed{z+1=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

إذا كان: $\cos\frac{\theta}{2}>0$ فإن: $\boxed{z+1=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$

إذا كان: $\cos\frac{\theta}{2}<0$ فإن: $\boxed{z+1=\left(-2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}}$

$$z-1=e^{i\theta}+1$$

$$=e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\boxed{z-1=\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

إذا كان: $\sin\frac{\theta}{2}>0$ فإن: $\boxed{z+1=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}}$

إذا كان: $\sin\frac{\theta}{2}<0$ فإن: $\boxed{z+1=\left(-2\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}}$

5- معيار وعمدة: $\frac{z-1}{z+1}$ $z\in\mathbb{U};(z\neq1;z\neq-1)$

$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{\left(2i\sin\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}{\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

$$\boxed{\frac{z-1}{z+1}=i\tan\frac{\theta}{2}e^{i\theta}}$$

إذا كان: $\tan\frac{\theta}{2}>0$ فإن: $\boxed{\frac{z-1}{z+1}=\tan\frac{\theta}{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}}$

إذا كان: $\tan\frac{\theta}{2}<0$ فإن: $\boxed{\frac{z-1}{z+1}=-\tan\frac{\theta}{2}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}}$

6- حدد معيار وعمدة

$(z,z')\in\mathbb{U}^2$; $(z\neq z')$ $z-z'$; $(z\neq-z')$ $z+z'$

$$z+z'=e^{i\theta}+e^{i\theta'}$$

$$=e^{i\theta'}\left(e^{i(\theta-\theta')}+1\right)$$

$$=e^{i\theta'}2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}$$

$$\boxed{z+z'=2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

$$z-z'=e^{i\theta}-e^{i\theta'}$$

$$=e^{i\theta'}\left(e^{i(\theta-\theta')}-1\right)$$

$$=e^{i\theta'}2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}$$

$$\boxed{z+z'=2i\sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}}$$

تمرين 20

نعتبر النقطتين $A(i)$ ؛ $A'(-i)$

$f(z)=\frac{\bar{z}(z-i)}{z+i}$ تطبيق من $\mathbb{C}-\{i\}$ إلى $\mathbb{C}$

و F التطبيق من $\mathcal{P}-\{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث: $f(z)=z'$

1- أ- بين أن إذا كان: $z\neq0$ و $z'\neq0$ فإن:

$(z \neq 0\ ;\ z' \neq 0);|z| = |z'|$

و $\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i)\ [2\pi]$

(لاحظ أن : $\overline{z-i} = \bar{z} + i$)

ب- بين أن إذا كان : $|z| = 1$ فإن : $f(z) = -i$

2- أ - حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F

ب- حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل ai $(a \in \mathbb{R})$

3- أ- بين أن :

$$z' - z = \frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i) \quad \text{و} \quad z' + i = \frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$$

ب- استنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان

و أن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

ج- أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F

الحل

1- أ

$$\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i} = \frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}$$

$$|z'|^2 = \frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} \times \overline{\left(\frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}\right)}$$

$$= \frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} \times \frac{z\overline{(z-i)}}{(z-i)}$$

$$= z\bar{z}$$

$$|z'|^2 = |z|^2$$

إذن : $\boxed{|z'| = |z|}$

و

$$\arg(z') \equiv \arg\left(\frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \arg(\bar{z}) + \arg(z-i) - \arg(\overline{z-i})[2\pi]$$

$$\equiv -\arg(z) + \arg(z-i) + \arg(z-i)[2\pi]$$

$$\boxed{\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i)\ [2\pi]}$$

ب- لنبين أن إذا كان : $|z| = 1$ فإن : $f(z) = -i$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$f(z) = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$$

$$= \frac{1-i\bar{z}}{\bar{z}+i}$$

$$= \frac{i(-i-\bar{z})}{\bar{z}+i}$$

$$\boxed{f(z) = -i}$$

2- أ - تحديد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F

$z \in \mathbb{C} - \{i\}$

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i} = z$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}z - i\bar{z} = \bar{z}z + iz$$

$$\Leftrightarrow -i(\bar{z}+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow -i\,2\mathrm{Re}(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$$

$$\boxed{f(z) = z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$$

مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F هو محور الأراتيب محروم من النقطة A

ب- تحديد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل ai $(a \in \mathbb{R})$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) + \overline{f(z)} = 0$$

$$\frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} + \overline{\left(\frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}}\right)} = \frac{\bar{z}(z-i)}{\overline{(z-i)}} + \frac{z\overline{(z-i)}}{(z-i)}$$

$$= \frac{\bar{z}(z-i)^2 + z\overline{(z-i)}^2}{(z-i)\overline{(z-i)}}$$

$$= \frac{\bar{z}z^2 - 2\bar{z}zi - \bar{z} + z\bar{z}^2 + 2z\bar{z}i - z}{(z-i)\overline{(z-i)}}$$

$$= \frac{z\bar{z}(z+\bar{z}) - (\bar{z}+z)}{(z-i)\overline{(z-i)}}$$

$$= \frac{(z+\bar{z})(|z|^2-1)}{(z-i)\overline{(z-i)}}$$

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (z+\bar{z})(|z|^2-1) = 0$$

إذن : $\Leftrightarrow z = -\bar{z}\ ou\ |z| = 1$

$$\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}\ ou\ |z| = 1$$

مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل ai $(a \in \mathbb{R})$ هو محور الأراتيب محروم من النقطة A

اتحاد الدائرة المثلثية محرومة من النقطة A

3- أ- لنبين أن : $z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$

$$z'+i=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}+i$$
$$=\frac{\bar{z}(z-i)+(\bar{z}+i)i}{\bar{z}+i}$$
$$=\frac{(\bar{z}z-\bar{z}i)+(\bar{z}i-1)}{(\bar{z}+i)(z-i)}(z-i)$$
$$\boxed{z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)}$$

لنبين أن : $z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)$

$$z'-z=\frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}-z$$
$$=\frac{\bar{z}(z-i)-(\bar{z}+i)z}{\bar{z}+i}$$
$$=\frac{(\bar{z}z-\bar{z}i)-(\bar{z}z+iz)}{(\bar{z}+i)(z-i)}(z-i)$$
$$\boxed{z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)}$$

ب- نستنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان

لدينا : $z'+i=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)\Leftrightarrow\frac{z'+i}{z-i}=\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}$

بما أن : $\frac{z\bar{z}-1}{|\bar{z}+i|^2}\in\mathbb{R}$

فإن : $\boxed{\text{المتجهتين : } \overrightarrow{AM} \text{ و } \overrightarrow{A'M'} \text{ مستقيميتان}}$

نستنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

إذا كان : $z=0$ فإن : $M=M'=O$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{MM'}=\vec{O}$

إذن : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

نفترض أن : $z\neq 0$

لدينا : $z'-z=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}(z-i)\Leftrightarrow\frac{z'-z}{z-i}=\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}$

بما أن : $\frac{-(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}\in\mathbb{R}^*$

فإن : $\arg\left(\frac{-i(z+\bar{z})}{|\bar{z}+i|^2}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$

إذن : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

ج- طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F

لدينا : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيميتان

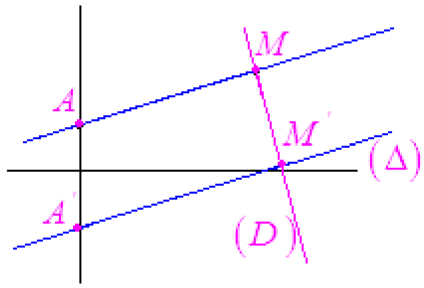
نأخذ نقطة M من $\mathcal{P}-\{A\}$

نرسم المستقيم (Δ) الموازي ل (AM) المار من A'

لدينا : $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان

نرسم المستقيم (D) العمودي على (AM) المار من M

$(\Delta)\cap(D)=\{M'\}$



تمرين 21

نعتبر : $j=e^{2i\frac{\pi}{3}}$

$A;B;C$ نقط من المستوى العقدي ألحاقها

$a=8$; $b=6j$; $c=8j^2$

لتكن : A' صورة B بالدوران $R\left(c,\frac{\pi}{3}\right)$

B' صورة C بالدوران $R\left(A,\frac{\pi}{3}\right)$

C' صورة A بالدوران $R\left(B,\frac{\pi}{3}\right)$

1- حدد : $a';b';c'$ ألحاق $A;B;C$

استنتج أن : $O\in(BB')$

2- بين أن المستقيمات : $(AA')\cap(BB')\cap(CC')=\{O\}$

3- أ- احسب : $OA+OB+OC$

ب- بين أن : $j^3=1$ و $j^2=\bar{j}$ و $1+j+j^2=0$

ج- M النقطة التي لحقها z ، تحقق أن :

$$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj^2+cj|=22$$

د- بين أن المسافة $MA+MB+MC$ تكون دنوية إذا كان $M=O$

الحل

-1

$$R_{(c,\frac{\pi}{3})}(B)=A' \Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(6e^{2i\frac{\pi}{3}}-8e^{4i\frac{\pi}{3}}\right)+8e^{4i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a'=-6-8e^{-i\frac{\pi}{3}}+8e^{-2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a'=-6-8\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+8\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\boxed{R_{(c,\frac{\pi}{3})}(B)=A \Leftrightarrow a'=-14}$$

$$R_{(A,\frac{\pi}{3})}(C)=B' \Leftrightarrow b'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(8e^{4i\frac{\pi}{3}}-8\right)+8$$

$$\Leftrightarrow b'=8e^{-i\frac{\pi}{3}}-8e^{i\frac{\pi}{3}}+8$$

$$\Leftrightarrow b'=8\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+8$$

$$\Leftrightarrow b'=8-8\sqrt{3}i$$

$$\boxed{R_{(A,\frac{\pi}{3})}(C)=B' \Leftrightarrow b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$R_{(B,\frac{\pi}{3})}(A)=C' \Leftrightarrow c'=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(8-6e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)+6e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c'=8e^{i\frac{\pi}{3}}+6+6e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow c'=6+8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+6\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Leftrightarrow c'=7+7\sqrt{3}i$$

$$\boxed{R_{(B,\frac{\pi}{3})}(A)=C' \Leftrightarrow c'=14e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

لدينا : $b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و $b=6j$

إذن : $\frac{b'}{b}=\frac{16e^{-i\frac{\pi}{3}}}{6e^{i2\frac{\pi}{3}}}$

$\frac{b'}{b}=-\frac{16}{6}$

و منه : $\frac{b'}{b}\in\mathbb{R}$

$\boxed{O\in(BB')}$

بنفس الطريقة نجد : $\boxed{O\in(CC')}$ و $\boxed{O\in(AA')}$

-2

بما أن : $\boxed{O\in(CC')}$ و $\boxed{O\in(BB')}$ و $\boxed{O\in(AA')}$

فإن : $(AA')\cap(BB')\cap(CC')=\{O\}$

-3 أ - $\boxed{OA+OB+OC=22}$

ب - $j^3=\left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^3=1$

$$j^2=\left(e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)^2=e^{4i\frac{\pi}{3}}=e^{-2i\frac{\pi}{3}}=\overline{j}$$

$$1+j+\overline{j}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\boxed{1+j+j^2=0}$$

ج-

$$|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj^2+cj-z(1+j+j^2)|$$

$$=|a+bj^2+cj|$$

$$=|8+6j^3+8j^3|$$

$$=22$$

إذن : $\boxed{|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj+cj^2|=22}$

د- لنبين أن المسافة $MA+MB+MC$ تكون دنوية إذا كان $M=O$

لدينا: $OA+OB+OC=22$

و $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=|a+bj+cj^2|=22$

إذن : $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|=OA+OB+OC$

لدينا: $|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j|\le|a-z|+|b-z|+|c-z|$

إذن : $OA+OB+OC\le MA+MB+MC$

و منه : المسافة $MA+MB+MC$ تكون دنوية إذا كان $M=O$