المجموعات و التطبيقات

المجموعات

- **المجموعة هي تجمع لأشياء أو عناصر مادية أو غير مادية ، واقعية أو خيالية .**

يمكن وصف مجموعة بذكر جميع عناصرها (مجموعة معرفة بتفصيل) أو بذكر صفة أو علاقة بين عناصرها (مجموعة معرفة بإدراك).

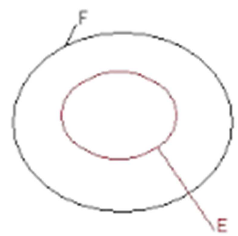
مثال : $\{0,1,2,........\}=\mathbb{N}$ { أحمر ، أسود } $\{0,1\}$ $\{x\in\mathbb{R}/|x-2|\leq 7\}$

- **قد تكون مجموعة خالية من العناصر و تسمى مجموعة فارغة و نرمز لها ب :** $\varnothing$
- **نرمز ب** $x\in E$ **إذا كان** x **عنصر ينتمي للمجموعة** E **و نرمز ب** $x\notin E$ **في حالة العكس.**

في

التضمن

نقول أن E **ضمن** F **و نكتب** $E\subset F$ **إذا كان كل عنصر من** E **هو أيضا عنصر من** F **أو بتعبير رياضي :**
$(\forall x\in E):x\in F$ **و نقول كذلك أن** E **جزء من** F



- **لكل مجموعة** E **لدينا :** $E\subset E$ **و** $\varnothing\subset E$
- **لتكن** A **و** B **و** C **ثلاث مجموعات ، لدينا :** $(A\subset B \text{ و } B\subset C)\Rightarrow A\subset C$

التساوي

$E=F$ **تكافئ** $E\subset F$ **و** $F\subset E$ **تكافئ** $x\in E\Leftrightarrow x\in F$

مجموعة أجزاء E

نرمز لها ب : $\mathscr{P}(E)$ **و هي المجموعة المكونة من جميع أجزاء** E

مثال : $E=\{1,2,3\}$ $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

لتكن E **مجموعة**

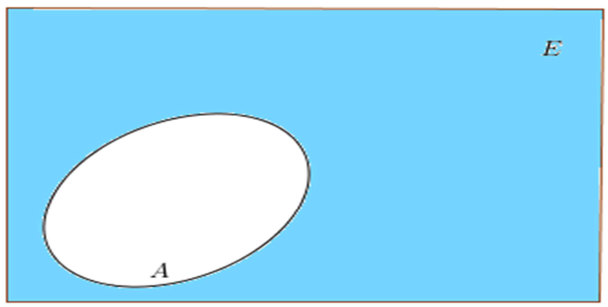
- $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(E)$
- $E \in \mathscr{P}(E)$ و $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$

متممة مجموعة

إذا كان $A \subset E$

مجموعة عناصر E **التي لا تنتمي ل** A **تسمى متممة** A **في** E : $C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$

و نرمز لها كذلك ب : $E \setminus A$ **أو** $\overline{A}$

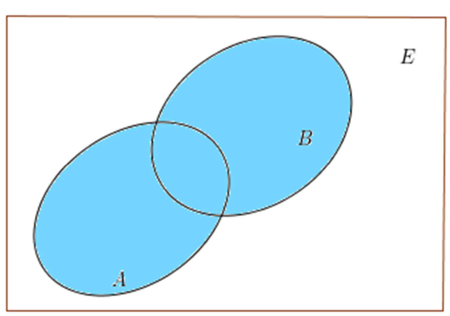


- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
- $C_E^{\emptyset} = E$ و $C_E^E = \emptyset$

الإتحاد

لتكن A **و** B **مجموعتين ضمن** E

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ أو } x \in B\}$$



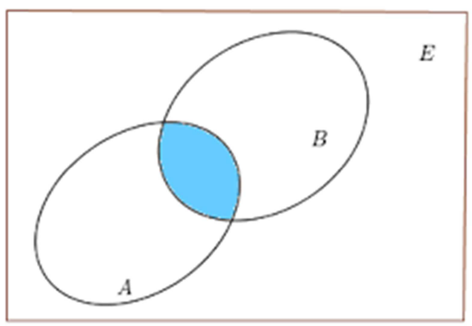
لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من المجموعة E

- $B \subset A \cup B$ و $A \subset A \cup B$
- $A \cup B = B \cup A$ و $A \cup \varnothing = A$ و $A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

التقاطع

لتكن A و B مجموعتين ضمن E

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ و } x \in \mathrm{B}\}$$

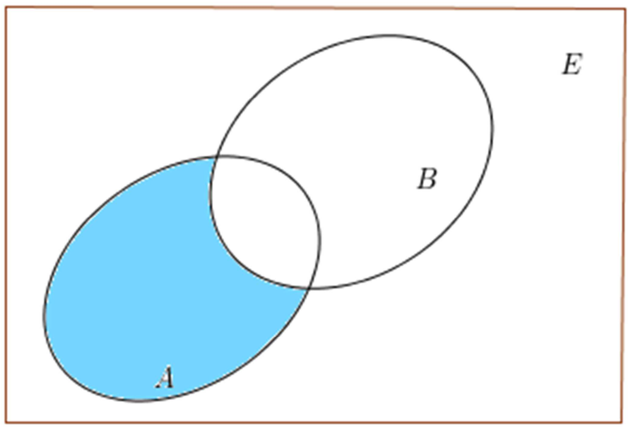


لتكن A و B و C ثلاثة أجزاء من المجموعة E

- $A \cap B \subset B$ و $A \cap B \subset A$
- $A \cap B \subset A \cup B$
- $A \cap B = B \cap A$ و $A \cap \varnothing = \varnothing$ و $A \cap A = A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $A \bigcap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

فرق مجموعتين

لتكن A و B جزأين من المجموعة E
فرق المجموعتين A و B في هذا الترتيب هو مجموعة العناصر من E التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B و نرمز له ب :
$A \setminus B$ و لدينا : $A \setminus B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ و } x \notin B\}$



- $A \setminus B = A \cap C_E^B$
- $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$
- **الفرق التماثلي :** $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

الجداء الديكارتي

لتكن E و F مجموعتين
الجداء الديكارتي ل E و F نرمز له ب : $E \times F$ و هو مجموعة الأزواج (x, y) حيث $x \in E$ و $y \in F$
مثال :

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$$

$$[1,4] \times \mathbb{R} = \{(x, y) / 1 \le x \le 4 \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$$

التطبيقات

نسمي تطبيق $f : E \to F$ كل علاقة تربط عنصرا x من E بعنصر وحيد $y = f(x)$ من F

تساوي تطبيقين

ليكن $f : E \to F$ و $g : E \to F$ تطبيقين

$$(\forall x \in E) \quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g$$

التمثيل المبياني للتطبيق $f : E \to F$

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in E \times F / x \in E\}$$

مركب تطبيقين

ليكن $f : E \to F$ و $g : F \to G$ إذن $g \circ f : E \to G$ هو التطبيق المعرف ب : $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

التطبيق المطابق

$$\begin{array}{rccc} Id_E : & E & \to & E \\ & x & \to & x \end{array}$$

الصورة المباشرة – الصورة العكسية

لتكن $A \subset E$ و ليكن التطبيق $f : E \to F$

الصورة المباشرة ل A بالتطبيق f نرمز لها ب : $f(A)$ و هي معرفة بما يلي : $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

ليكن f تطبيقا من E نحو F و A و B جزأين من المجموعة E ، لدينا :

- $f(A) \subset F$
- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

- $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
- $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

لتكن $B\subset F$ **و ل**
يكن التطبيق $f:E\to F$
الصورة العكسية ل B **بالتطبيق** f **نرمز لها ب :** $f^{-1}(B)$ **و هي معرفة بما يلي :** $f^{-1}(B)=\{x\in E/f(x)\in B\}$

ليكن f **تطبيقا من** E **نحو** F **و** A **و** B **جزأين من المجموعة** E **، لدينا :**

- $f^{-1}(B)\subset E$
- $A\subset B\Rightarrow f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$
- $f^{-1}(A\cap B)\subset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

تطبيق تبايني – تطبيق شمولي – تطبيق تقابلي

لتكن E **و** F **مجموعتين و ليكن التطبيق** $f:E\to F$

- f **تبايني** $\Leftrightarrow$ $\left(\forall(a,b)\in E^2\right)\quad\left[f(a)=f(b)\Rightarrow a=b\right]$
- f **شمولي** $\Leftrightarrow$ $(\forall y\in F)(\exists x\in E):y=f(x)$ **(** $f(E)=F$ **)**
- f **تقابل** $\Leftrightarrow$ $(\forall y\in F)(\exists! x\in E):y=f(x)$ **(** f **تبايني و شمولي)**

إذا كان f **تقابل فإنه و تقابله العكسي** f^{-1} **يحققان :**
$f^{-1}\circ f=Id_E$ و $f\circ f^{-1}=Id_F$

ليكن $f:E\to F$ **و** $g:F\to G$ **تطبيقين تقابليين**
التطبيق $g\circ f$ **تقابل و لدينا :** $(g\circ f)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$