2 ع ت — اتصال دالة

1.اتصال دالة :

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2.الاتصال على مجال :

– تكون دالة متصلة على مجال $]a,b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة منه

– تكون دالة متصلة على $[a,b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a,b[$ ، على اليمين في a و على اليسار في b .

خاصيـــــات :

– كل دالة حدودية متصلة على R .

– كل دالة جذرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها .

– الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\sin x$ متصلتان على R .

– الدالة $x\to\sqrt{x}$ متصلة على $[0,+\infty[$.

– الدالة $x\to\tan x$ متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها وهي $D=R-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ /\ k\in Z\right\}$

3.العمليات على الدوال المتصلة :

– إذا كانت f و g دالتين متصلتين في عدد x_0

فإن الدوال $f+g$ و $f.g$ و $\alpha.f$ حيث α عدد حقيقي متصلة في x_0

– وإذا كان $g(x_0)\neq 0$ فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتان متصلتان في x_0

4.اتصـــال مركبة دالتين :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J حيث

$f(I)\subset J$ و x_0 عنصرا من I

إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$

فإن الدالة $g\circ f$ تكون متصلة في x_0 .

نتيجة: إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0

فإن $\sqrt{f}$ دالة متصلة في x_0 .

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I)\subset J$

إذا كان : $\lim\limits_{x_0} f(x)=l$ و g متصلة في l

فإن : $\lim\limits_{x_0}(g\circ f)(x)=g(l)$

5.مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ و λ عددا حقيقيا محصورا بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=\lambda$

نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a,b]$ و $f(a).f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $]a,b[$.

وإذا كانت f متصلة ورتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن الحل يكون وحيدا

6.الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعا :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإنها تقبل دالة عكسية معرفة على المجال $J=f(I)$ ولدينا التكافؤ التالي :

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$$

خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على I فإن :

. دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $f(I)$ ولها نفس تغيرات f

. منحنيي f و f^{-1} متماثلان في م م م بالنسبة للمنصف الأول

7.تعريف دالة الجذر من الرتبة n :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

الدالة العكسية لقصور الدالة $x\to x^n$ على R^+ يسمى دالة الجذر من الرتبة n

خاصيـــــات :

. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ معرفة على R^+ وتأخذ قيمها في R^+

. الدالة $x\to\sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعا على R^+ .

. $\begin{cases} x=\sqrt[n]{y} \\ y\in R^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^n \\ x\in R^+ \end{cases}$

. $\forall x\in R^+,\ \sqrt[n]{x^n}=x$ *** $\forall x\in R^+,\ \left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$

$$\left(\forall x\in R^+\right)\left(\forall y\in R^+\right):\ \sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x=y$$

$$\left(\forall x\in R^+\right)\left(\forall y\in R^+\right):\ \sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}\ \Leftrightarrow\ x<y$$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}=\sqrt[nm]{x}$ **** $\forall x\geq 0:\ \sqrt[n]{x}=\sqrt[nm]{x^m}$

$\forall x\geq 0\ ,\ \forall y\geq 0:\ \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$

$\forall x\geq 0\ ,\ \forall y>0:\ \sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\quad (y>0)$

+.إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

8.القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا :

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و r عددا جذريا غير منعدم

العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ويكتب $a^r=\sqrt[q]{a^p}$ حيث : $r=\frac{p}{q}$ مع $p\in Z^*$ و $q\in N^*$

خاصيـــــات :

لكل a و b من R_+^* و r و r' من Q^* لدينا :

$$a^r.a^{r'}=a^{r+r'}\ ,\ (ab)^r=a^rb^r\ ;\ a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}\ ;\ \frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}\ ;\ \left(a^r\right)^{r'}=a^{rr'}$$