

الدوال اللوغارتمية والأسية

4) الإشتقاق

$$(\forall x > 0) : (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (*)$$

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad (*)$$

$$(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad (*)$$

5) النهايات الإعتيادية

$$(\ln(+\infty) = +\infty) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad (a)$$

$$(\ln(0) = -\infty) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad (b)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad (c)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad (d)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \text{أو} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad (e)$$

ملاحظة

$$\frac{u(x) \ln(v(x))}{w(x)} \quad \begin{cases} v(x) \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{\ln t}{t} \\ v(x) \rightarrow 0^+ \rightarrow t \ln t \\ v(x) \rightarrow a \neq 0 \rightarrow \frac{\ln t}{t-1} \end{cases}$$

(II) دالة الأس النيبيري

1) تعريف

نسمي دالة الأس النيبيري الدالة العكسية للدالة \ln ونرمز لها بالرمز $x \rightarrow e^x$

ملاحظة

(*) الدالة $x \rightarrow e^x$ معرفة على \mathbb{R} .

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0 \quad (*)$$

$$e^1 = e \quad (*) \quad e^0 = 1 \quad (*) \quad (b)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x \quad (*) \quad (c)$$

$$(\forall x > 0) : e^{\ln(x)} = x \quad (*)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y > 0) : e^x = y \Leftrightarrow \ln(y) = x \quad (*) \quad (d)$$

2) خاصيات

ليكن $x, y \in \mathbb{R}$ و $r \in \mathbb{Q}$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad (*) \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (*)$$

$$e^{rx} = (e^x)^r \quad (*) \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (*)$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \quad (*)$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y \quad (*)$$

3) الإشتقاق

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : (e^x)' = e^x \quad (*)$$

$$(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)} \quad (*)$$

(I) دالة اللوغارتم النيبيري

1) تعريف

نسمي دالة اللوغارتم النيبيري الدالة الأصلية F للدالة

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

والتي تحقق $F(1) = 0$ ونرمز لها بـ \ln أو Log

ملاحظة

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad (*) \quad (a)$$

$$D_{\ln} =]0, +\infty[\quad (*)$$

$$f(x) = \ln(u(x)) \quad \text{نعتبر الدالة} \quad (*) \quad (b)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow u(x) > 0 \quad \text{لدينا}$$

$$f(x) = \ln|u(x)| \quad \text{نعتبر الدالة} \quad (*)$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow u(x) \neq 0 \quad \text{لدينا}$$

$$\ln(1) = 0 \quad (*) \quad (c)$$

$$(e \approx 2,71828) \quad \ln(e) = 1 \quad (*)$$

$$(\forall r \in \mathbb{Q}) : \ln(e^r) = r \quad (*)$$

2) خاصيات الدالة \ln

ليكن $a > 0$ و $b > 0$ و $r \in \mathbb{Q}$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (*)$$

$$\ln(a^r) = r \ln a \quad (*)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \quad (*)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad (*)$$

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad (*)$$

$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \quad (*)$$

ملاحظة :

$$\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b| \quad : \text{إذا كان } ab > 0 \text{ فإن} \quad (*)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b| \quad : \text{إذا كان } \frac{a}{b} > 0 \text{ فإن} \quad (*)$$

$$\ln(a^n) = n \ln|a| \quad : \text{إذا كان } a^n > 0 \text{ فإن} \quad (*)$$

3) إشارة $\ln(x)$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

4 النهايات الاعتيادية

$$(e^{+\infty} = +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (a)$$

$$(e^{-\infty} = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (b)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad (c)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad (d)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (e)$$

ملاحظة

$$\frac{u(x)e^{v(x)} - \varphi(x)}{w(x)}$$

$$v(x) \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{e^t}{t}$$

$$v(x) \rightarrow -\infty \rightarrow t e^t$$

$$v(x) \rightarrow a \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{e^t - 1}{t}$$

(III) دالة اللوغاريتم للأساس a .

1 تعريف

ليكن $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$ نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a الدالة التي نرمز لها بـ \log_a والمعرفة بـ :

$$(\forall x > 0) : \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

حالات خاصة

(* الدالة \log_{10} تسمى دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها بالرمز \log

$$(\forall x > 0) : \log(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

(* دالة اللوغاريتم النيبيري هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس e .

2 خاصيات

(* الدالة \log_a لها نفس خاصيات \ln .

$$\log_a(1) = 0 \quad (*) \quad \log_a(a) = 1 \quad (*)$$

$$\log(1) = 0 \quad (*) \quad \log(10) = 1 \quad (*)$$

(IV) الأس الحقيقي لعدد حقيقي موجب قطعا

1 تعريف

$$(\forall a > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : a^x = e^{x \ln(a)}$$

2 خاصيات

ليكن $a > 0$ و $b > 0$ و x و y من \mathbb{R} .

$$a^{xy} = (a^x)^y \quad (*) \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad (*)$$

$$a^x b^x = (ab)^x \quad (*) \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad (*)$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \quad (*) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (*)$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y \quad (*)$$

$$\ln(a^x) = x \ln a \quad (*)$$