المثلث القائم الزاوية و الدائرة

I - خاصية منتصف وتر مثلث قائم الزاوية :

1) – الخاصية المباشرة :

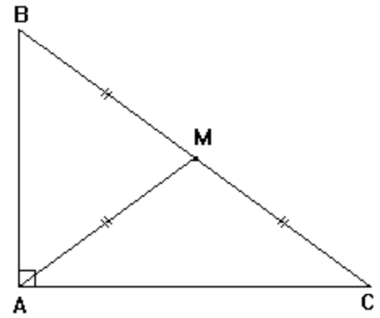
إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن منتصف وتره يبعد بنفس المسافة عن رؤوسه.
اي محاط بدائرة مركزها منتصف الوتر .

▶بتعبير آخر :

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A و M منتصف [BC]
فإن : $MA = MB = MC$.اي: ABC محاط بدائرة مركزها M

▶مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و M منتصف [BC] .



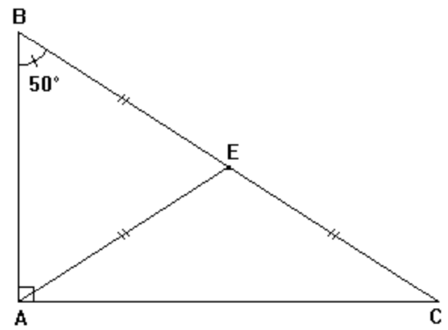
سيكون لدينا : $MA = MB = MC$.

تمرين تطبيقي :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $\hat{ABC} = 50^\circ$ و E منتصف [BC] .
1) – أرسم شكـلا مناسبا .
2) – ماهي طبيعة المثلث AEB ؟ علل جوابك .
3) – استنتج قياس الزاوية $E\hat{A}B$.

الحـل :

1) – الشكـل :



2) – طبيعة المثلث AEB .

نعلم أن : ABC مثلث قائم الزاوية في A .
و
E منتصف الوتر [BC] .

إذن : $EA = EB = EC$.

أي : $EA = EB$.

و منه فإن المثلث AEB متساوي الساقين رأسه E .

3) – لنستنتج قياس الزاوية $E\hat{A}B$.

نعلم أن : AEB مثلث متساوي الساقين في E .

إذن : $E\hat{A}B = E\hat{B}A$.

و بما أن : $E\hat{B}A = 50^\circ$ فإن : $E\hat{A}B = 50^\circ$

2) – الخاصية العكسية :

خاصية:

إذا كان منتصف أحد أضلاع مثلث يبعد بنفس المسافة عن رؤوسه ، فإن هذا المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل لهذا الضلع .

بتعبير آخر :

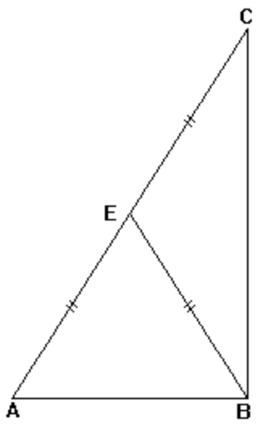
ABC مثلث و E منتصف $[AB]$.
إذا كان : $EA = EB = EC$
فإن ABC مثلث قائم الزاوية في C .

تمرين تطبيقي :

AEB مثلث متساوي الساقين في E و C مماثلة A بالنسبة للنقطة E .
1) – أرسم شكلا مناسبا .
2) – أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية .

الحـل :

1) – الشكـل :



2) – لنثبت أن ABC مثلث قائم الزاوية .

نعلم أن : AEB مثلث متساوي الساقين رأسه E .

إذن : $EA = EB$ ① .

و نعلم أن : C هي مماثلة A بالنسبة للنقطة E .

إذن : E منتصف $[AC]$.

و منه فإن : $EA = EC$ ② .

من ① و ② نستنتج أن : $EA = EB = EC$.

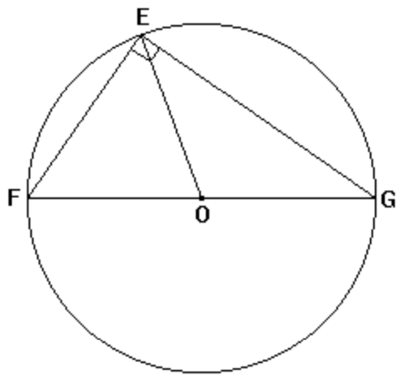
و بالتالي :

لدينا في المثلث ABC : و $\left.\begin{array}{l} E \text{ منتصف } [AC] \\ EA = EB = EC \end{array}\right\}$

إذن : ABC مثلث قائم الزاوية في B.

II - المثلث القائم الزاوية و الدائرة :

1) – مثال :



EFG مثلث قائم الزاوية في E و O منتصف $[FG]$.

-- لنثبت أن O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث EFG محددين شعاعها.

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E .

و بما أن O منتصف وتره $[FG]$ فإن : $OE = OF = OG$ (حسب الخاصية المباشرة)

و منه فإن E و F و G تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O .

و بالتالي فإن O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث EFG و التي شعاعها $\frac{FG}{2}$.

2) – خاصية :

إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن منتصف وتره هو مركز الدائرة المحيطة به و التي شعاعها هو نصف طول وتره

► بتعبير آخر :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A و O منتصف وتره $[BC]$
فإن : O هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC و التي شعاعها $\frac{BC}{2}$

III - مبرهنة فيتاغورس :

1) – الخاصية المباشرة :

إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A فإن :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

تطبيق :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : AB = 3 cm و BC = 5 cm .
لنحسب AC .

لدينا حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

إذن :

$$AC^2 = BC^2 - AB^2$$

$$AC^2 = 5^2 - 3^2$$

$$AC^2 = 25 - 9$$

$$AC^2 = 16$$

و بما أن AC عدد موجب فإن : $AC = 4$.

2) – الخاصية العكسية :

إذا كان ABC مثلث بحيث : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
فإن: هذا المثلث قائم الزاوية في A.

تطبيق :

ABC مثلث بحيث : $AC = \frac{3}{5}$ و $AB = 1$ و $BC = \frac{4}{5}$.

لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية .

لدينا : $AB^2 = 1^2 = 1$ و $BC^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ و $AC^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

نلاحظ أن : $1 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25}$ أي : $AB^2 = AC^2 + BC^2$

و حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في C .

3) – خاصية لأضلاع مثلث قائم الزاوية :

خاصية:

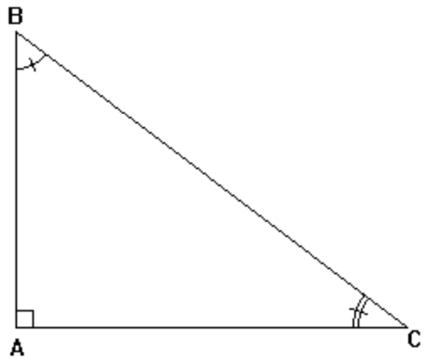
إذا كان مثلث قائم الزاوية فإن طول وتره أكبر من
طولي ضلعي الزاوية القائمة .

VI - جيبب تمام زاوية حادة :

1) – تعريف :

جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية يساوي
خارج طول الضلع المحادي للزاوية الحادة على طول الوتر

▶ إصطلاحات :



ABC مثلث قائم الزاوية في A

-- الزاويتان الحادتان هما : $A\hat{B}C$ و $A\hat{C}B$.

-- $[AB]$ هو الضلع المحادي للزاوية $A\hat{B}C$ ، والمقابل للزاوية $A\hat{C}B$.

-- $[AC]$ هو الضلع المحادي للزاوية $A\hat{C}B$ ، و المقابل للزاوية $A\hat{B}C$.

-- $[BC]$ هو الوتر.

▶ بتعبير آخــر :

ABC مثلث قائم الزاوية في A .

$\cos A\hat{B}C = \dfrac{AB}{BC}$ و $\cos A\hat{C}B = \dfrac{AC}{BC}$

▶ ملاحظة هــامة :

α قياس زاوية حــادة : $0 < \cos\alpha < 1$

2) – مثال :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $AB = 3$ cm و $AC = 4$ cm . لنحسب $\cos A\hat{B}C$.

لنحسب أولا BC .

بما أن ABC مثلث قائم الزاوية في فإن حسب مبرهنة فيتاغورس :