

## تذكير لعموميات حول المتتاليات العددية و المتتاليات الحسابية و الهندسية

i. متتالية مكبورة - مصغرة - محدودة : ( تذكير )

.01 تعريف :

- متتالية عددية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $M$  و  $m$  عددين من  $\mathbb{R}$ .
- مكبورة ب  $M$  يكافئ  $\forall n \geq n_0; u_n \leq M$  ( أو  $\forall n \geq n_0; u_n < M$  )
- مصغرة ب  $m$  يكافئ  $\forall n \geq n_0; m \leq u_n$  ( أو  $\forall n \geq n_0; m < u_n$  )
- محدودة يكافئ إن  $u_n$  مكبورة ومحدودة .

.02 مثال : نعتبر المتتالية العددية :  $(w_n = \frac{n+3}{n+4})_{n \in \mathbb{N}}$ . بين أن:  $w_n$  مكبورة ثم مصغرة على  $\mathbb{N}$ .

ii رتبة متتالية :

.01 تعريف :

- متتالية عددية  $(u_n)_{n \in I}$
- 1  $u_n$  متتالية تزايدية على  $I$  يكافئ  $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n \leq u_m$
- 2  $u_n$  متتالية تناقصية على  $I$  يكافئ  $\forall n, m \in I; n < m \Rightarrow u_n \geq u_m$
- 3  $u_n$  متتالية ثابتة على  $I$  يكافئ  $\forall n, m \in I; u_n = u_m$

.02 خاصية :

- متتالية عددية  $(u_n)_{n \in I}$
- $u_n$  متتالية تزايدية على  $I$  يكافئ:  $\forall n \in I; u_n \leq u_{n+1}$
- $u_n$  متتالية تناقصية قطعا على  $I$  يكافئ:  $\forall n \in I; u_n \geq u_{n+1}$
- $u_n$  متتالية ثابتة على  $I$  يكافئ:  $\forall n \in I; u_{n+1} = u_n$

.03 مثال :

نأخذ  $w_1 = 1$  و  $w_{n+1} = 1 + w_n$  . أدرس رتبة  $w_n$  .

iii المتتالية الحسابية :

.01 تعريف :

متتالية عددية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

نقول إن  $u_n$  متتالية حسابية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم  $r$  وحدها الأول  $u_{n_0}$  يعني إن  $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$ .

.02 مثال: نعتبر المتتالية العددية الآتية :  $u_n = 2n + 3; n \geq 0$  . بين أن  $u_n$  متتالية حسابية وحدد عناصرها المميزة .

iv صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

.01 خاصية :

متتالية عددية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_{n_0}$  لدينا :  $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$ .

.02 خاصية :

متتالية عددية حسابية أساسها  $r$  إذا فقط إذا كان  $\forall n, p \geq n_0 : u_n = u_p + (n - p)r$  ( مع  $n$  و  $p$  من  $\mathbb{N}$  )



**03. أمثلة :**

- **مثال 1 :** متتالية حسابية أساسها  $r=3$  وحدها  $u_7$ . أحسب  $u_{2007}$ .
  - **مثال 2 :** متتالية حسابية أساسها  $r$  وحدها  $u_0=5$ . أحسب  $u_{100} = -45$ . حدد  $r$  و  $u_n$  بدلالة  $n$ .
- v.** المجموع لحدود متتابعة لمتتالية حسابية :

**01. خاصية :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية حسابية أساسها  $r$  وحدها الأول  $u_{n_0}$ . لدينا :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[ \frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$$

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{عدد الحدود})$$

**02. ملاحظة :**

هناك  $n+1$  من الحدود  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

هناك  $n$  من الحدود  $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

هناك  $n-1$  من الحدود  $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$

**vi.** متتالية هندسية :

**01. تعريف :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.

نقول إن  $u_n$  متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم  $q$  وحدها الأول  $u_{n_0}$  يعني ان  $u_{n+1} = q \times u_n$   $\forall n \geq n_0$

**vii.** صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

**01. خاصية :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $u_{n_0}$ . لدينا :  $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$

**02. خاصية :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية هندسية أساسها  $q$  إذا وفقط إذا كان  $u_n = u_p \times q^{n-p}$   $\forall n, p \geq n_0$  (مع  $n$  و  $p$  من  $\mathbb{N}$ )

**03. تمرين :**

**viii.** المجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية :

**01. خاصية :**

$(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية هندسية أساسها  $q$  وحدها الأول  $u_{n_0}$ .  $n_0 \leq p < n$ .

$$(1) \text{ لدينا : مع } q \neq 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[ \frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$$

$$(2) \text{ لدينا : مع } q = 1 : S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p (n - p + 1)$$

**ix.** المعدل الحسابي – المعدل الهندسي : ثلاثة حدود متتابعة .

### 01. المعدل الحسابي.

$u_i = a$  و  $u_{i+1} = b$  و  $u_{i+2} = c$  حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها  $r$  .

لدينا  $r = u_i = u_{i+1} - r$  و  $r = u_{i+2} = u_{i+1} + r$  ومنه  $2u_{i+1} = u_i + u_{i+2}$  .

خلاصة :  $a + b = 2c$  وهي تسمى المعدل الحسابي .

**02. المعدل الهندسي :** إذا كانت  $u_n$  هندسية بالنفس الطريقة نحصل على:  $a \times c = b^2$  تسمى المعدل الهندسي.

## نهاية متتالية

**A.** نهاية منتهية لمتتالية

### 01. نشاط:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي:  $u_n = \frac{1}{n}; n \geq 2$

على المستقيم العددي نأخذ المجال المفتوح  $\left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$  الذي مركزه 0 . وحدة القياس 2cm .

أ – مثل المجال على المستقيم العددي .

ب – أحسب بعض الحدود و مثلها على المستقيم العددي .

ج – ماذا تلاحظ ؟

د – إذا كانت  $n$  تؤول إلى  $+\infty$  . ماذا يمكن أن نقول عن قيم  $u_n$  ؟

### 02. مفردات و رموز :

▪ نقول إن نهاية المتتالية  $u_n$  هي 0 عندما تؤول  $n$  إلى  $+\infty$

▪ نكتب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

### 03. تعريف:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.

نقول إن نهاية متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي العدد الحقيقي  $l$  إذا كان كل مجال مفتوح مركزه  $l$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$

ابتداء من رتبة معينة.

نكتب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

### 04. ملاحظة:

▪ إذا كان للمتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  نهاية فهذه النهاية وحيدة .

▪  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  و  $(i \in \mathbb{N}^*)$

▪  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

### 05. مثال:

لنعتبر المتتالية  $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$ . نبين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ .

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  ومنه:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 3 - 3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

**B.** نهاية لا منتهية لمتتالية:

**01. تعريف:**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.

▪ نقول إن نهاية متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي  $+\infty$  إذا كان كل مجال على شكل  $]A, +\infty[$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء

من رتبة معينة. نكتب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

▪ نقول إن نهاية متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هي  $-\infty$  إذا كان كل مجال على شكل  $]-\infty, A[$  يحتوي على جميع حدود المتتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  ابتداء

من رتبة معينة. نكتب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

**06. ملاحظة:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \text{ و } (i \in \mathbb{N}^*); \lim_{n \rightarrow +\infty} n^i = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

تقارب متتالية عددية :

**01. تعريف:**

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية.

▪ إذا كانت نهاية المتتالية  $u_n$  منتهية نقول إن المتتالية متقاربة.

▪ إذا كانت نهاية المتتالية  $u_n$  غير منتهية أو  $u_n$  ليس لها نهاية نقول إن المتتالية  $u_n$  متباعدة.

**02. مثال:**

▪  $u_n = n^4$ . لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  إذن  $u_n$  متباعدة.  $u_n = (-1)^n$  ليس لها نهاية:  $u_n$  هي متباعدة.

العمليات على نهايات المتتاليات- المتتاليات والترتيب

**01. العمليات:**

ملاحظة: لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين عدديتين.

▪ العمليات على المتتاليات هي نفس العمليات على الدوال العددية.

$$\text{مثال: } (u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$$

▪ الخصائص العمليات على نهايات المتتاليات العددية هي نفس خصائص النهايات على الدوال.

$$\text{مثال أ: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \text{ فإن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$$

$$\text{مثال ب: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

## 02. الترتيب:

▪ إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$  فإن  $l' < l$  و إذا كان  $u_n > 0$  فإن  $l > 0$

## 03. تطبيق:

(1) أحسب نهاية المتتالية التالية:  $u_n = \frac{1}{n} + 3; n \geq 1$

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$  ومنه:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

(2) أحسب نهاية المتتالية التالية:  $v_n = \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n}; n \geq 1$

لدينا:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right) = 3$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  ومنه:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 3\right)\sqrt{n} = +\infty$

مصادق التقارب-

## 01. نشاط:

p عدد صحيح طبيعي معلوم لكل عدد صحيح طبيعي n حيث  $n \geq p$  فهو يحقق العلاقة (1).

نعر عنه ب: ابتداء من الرتبة p لدينا العلاقة (1).

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(w_n)_{n \geq n_0}$  متتاليات عددية حيث ابتداء من الرتبة p (مع  $p \geq n_0$ )

ماذا يمكن أن نستنتج في كل حالة من الحالات التالية:

▪ إذا كان:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  و  $v_n \leq u_n \leq w_n$  ؟

▪ إذا كان:  $v_n \geq \alpha \cdot u_n$  (مع  $\alpha > 0$ ) و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ؟

▪ إذا كان:  $v_n \leq \alpha \cdot u_n$  (مع  $\alpha > 0$ ) و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  ؟

▪ إذا كان:  $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$  (مع  $\alpha > 0$ ) و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ؟

## 02. مصاديق:

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(w_n)_{n \geq n_0}$  متتاليات عددية إذا كان ابتداء من الرتبة p ( $\forall n \in \mathbb{N}; n \geq p$ ) يتحقق ما يلي:

**1.** إذا كان:  $v_n \leq u_n \leq w_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

**2.** إذا كان:  $v_n \geq \alpha \cdot u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**3.** إذا كان:  $v_n \leq \alpha \cdot u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ .

**4.** إذا كان:  $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

مع  $\alpha > 0$  و p عدد صحيح طبيعي معلوم ( $p \geq n_0$ ) و  $l \in \mathbb{R}$ .

## 03. أمثلة:

**1.** مثال للمصادق 1:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة ب:  $v_n = \frac{(-1)^n}{n} - 5$ ;  $n > 0$

نبين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$ .

لدينا:  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  إذن:  $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

ومنه:  $\frac{-1}{n} - 5 \leq \frac{(-1)^n}{n} - 5 \leq \frac{1}{n} - 5$

و بالتالي:  $\frac{-1}{n} - 5 \leq v_n \leq \frac{1}{n} - 5$

ولدينا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} - 5 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 5 = -5$

ومنه: حسب أحد مصاديق التقارب نحصل:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

خلاصة:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$

**2.** مثال للمصدق 2:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة ب:  $u_n = 2n + \cos(n)$ ;  $n \geq 0$  أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

لدينا:  $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos(n) \leq 2n + 1$

ومنه:  $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$  أي  $2n - 1 \leq u_n \leq 2n + 1$

ونعلم بأن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 1 = +\infty$  إذن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

خلاصة:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n + \cos(x) = +\infty$

**3.** مثال للمصدق 4:

نعتبر المتتالية العددية المعرفة ب:  $v_n = \frac{\cos n}{n}$ ;  $n \geq 1$  نبين أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

لدينا: (لأن  $|\cos n| \leq 1$ )  $\left| \frac{\cos n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\cos n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$

ومنه:  $\left| v_n - 0 \right| \leq \frac{1}{n}$  وبما أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  إذن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

تمرين: أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n + 5}{n^3}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

**04. خاصية:**

- كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متقاربة.

**05. مثال:**

نعتبر المتتالية:  $u_n = \frac{1}{n^3} + 7$ ;  $n \geq 1$

(1) نبين أن:  $u_n$  مصغورة:



لدينا:  $n \geq 1$  إذن  $\frac{1}{n}$  موجب قطعاً أي  $u_n > 0$  ومنه  $0 < u_n$  وبالتالي  $u_n$  مصغرة بـ 0. خلاصة:  $u_n$  مصغرة بـ 0  
(2) نبين أن:  $u_n$  تناقصية:

لكل  $n \geq 1$  لدينا:  $n+1 \geq n \Leftrightarrow (n+1)^3 \geq n^3$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

ومنه:  $u_n$  تناقصية. خلاصة: حسب ما سبق  $u_n$  مصغرة بـ 0 و تناقصية إذن هي متتالية متقاربة.

10. ملحوظة:

- كل متتالية تزايدية و سالبة (أي مكبورة بـ 0) هي متقاربة.
- كل متتالية تناقصية و موجبة (أي مصغرة بـ 0) هي متقاربة.

متتاليات خاصة:

A متتالية على شكل:  $u_n = a^n$  مع  $a \in \mathbb{R}$ .

01. خاصية:

- إذا كان  $a > 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ .
- إذا كان  $a = 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 1$ .
- إذا كان  $-1 < a < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ .
- إذا كان  $a \leq -1$  فإن  $a^n$  ليس لها نهاية.

02. أمثلة:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$  لأن  $a = 3 > 1$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  لأن  $-1 < a = \frac{1}{2} < 1$ .
- $(-1)^n$  ليس لها نهاية.
- تمرين: أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n - 8^n}{7^n}$

B متتالية على شكل:  $u_n = n^r$  مع  $r \in \mathbb{Q}^*$ .

01. خاصية:

- إذا كان  $r < 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = 0$ .
- إذا كان  $r > 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r = +\infty$ .

02. مثال

▪ نعتبر المتتالية التالية:  $u_n = \sqrt[7]{n^3}; n \geq 1$  أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

▪ نعتبر المتتالية التالية:  $u_n = \sqrt[7]{n^{-3}}; n \geq 1$  أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**C.** متتالية  $(v_n)_{n \geq n_0}$  على شكل:  $v_n = f(u_n)$

**01. نشاط:**

نعتبر الدالة:  $f(x) = \frac{2x-5}{7x+4}$  والمتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  حيث  $u_n = \frac{1}{n^3}$ .

(1) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفة ب:  $v_n = f(u_n)$  أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

(2) أ - أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  . ب - أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

(3) إذا كان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  استنتج علاقة بين  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  و  $f$  و  $l$ .

(4) أعط الخاصية:

**02. خاصية:**

إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية و  $f$  دالة متصلة في  $l$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ( $l \in \mathbb{R}$ ) فإن المتتالية  $(v_n)_{n \geq n_0}$  المعرفة ب  $v_n = f(u_n)$  هي

متقاربة و نهايتها تحقق ما يلي:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l)$ .

تمرين: نضع  $f(x) = \frac{5x-6}{x+3}$  و  $u_n = \frac{\cos n}{n}; n \geq 1$

(1) أحسب:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(2) نعتبر  $v_n = \frac{5 \cos n - 6n}{\cos n + 3n}; n \geq 1$  أكتب  $v_n$  بدلالة  $f$  و  $u_n$ .

(3) حدد النهاية التالية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**D.** متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  على شكل:  $u_{n+1} = f(u_n)$

**01. خاصية:**

إذا كانت  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $f(I) \subset I$  و  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية حيث:  $u_{n+1} = f(u_n)$

▪  $u_{n_0} \in I$  (حدها الأول من  $I$ ).

▪  $u_n$  متتالية متقاربة و نهايتها  $l$ .

فإن  $l$  هو حل للمعادلة  $f(x) = x$ . (أي  $l$  تحقق  $l = f(l)$ )

**02. مثال:**

نعتبر المتتالية:  $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}; n \geq 0$  و  $u_0 = 2$ . نعتبر أن  $u_n$  متقاربة ( $u_n$  تزايدية و مكبورة ب).

(1) حدد مجموعة اتصال الدالة  $f(x) = \sqrt{6+x}$

(2) أعط جدول تغيرات  $f$  على  $D_f$ .

(3) نعتبر المجال  $I = [0, 3]$  تحقق بأن  $f(I) \subset I$  و  $u_0 \in I$ . حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .