

**I. دالة أصلية لدالة عددية:****01. تقديم دالة أصلية لدالة :**

- ❖ **نشاط:** لنعبر الدالة :  $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$ .
- (1) هل توجد دالة  $F(x)$  تحقق ما يلي  $F'(x) = f(x)$  ؟
- (2) حاول أن تبحث عن صيغة ل  $F(x)$ .
- ❖ **مفردات:**

كل دالة  $F(x)$  تحقق  $F'(x) = f(x)$  تسمى دالة أصلية للدالة  $f(x)$

❖ **تعريف**

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$ .

نقول إن دالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$  إذا كانت  $F$  قابلة للاشتقاق على  $I$  وكان:  $\forall x \in I: F'(x) = f(x)$

❖ **أمثلة :**

(1) دالة أصلية للدالة  $f(x) = 4x + 2$  على  $\mathbb{R}$  هي  $F(x) = 2x^2 + 2x$

(2) دالة أصلية للدالة  $f(x) = \cos x$  على  $\mathbb{R}$  هي  $F(x) = \sin x$

**02. تحديد جميع الدوال الأصلية لدالة  $f$  :**

- ❖ **نشاط :** دالة أصلية للدالة  $f: x \rightarrow 2x + 3$  على  $\mathbb{R}$  هي  $F: x \rightarrow x^2 + 3x + c$  من  $\mathbb{R}$ .
- هل هناك دالة أخرى  $G(x)$  حيث  $G(x)$  دالة أصلية للدالة  $f$  ؟

❖ **خاصية**

لتكن  $f$  دالة عددية تقبل دالة أصلية  $F$  على مجال  $I$ .

مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  هي المجموعة المكونة من الدوال التي هي على شكل:  $F(x) + c$  مع  $c \in \mathbb{R}$

❖ **مثال:**

نعتبر الدالة  $f(x) = 10x - 2$  المعرفة على  $\mathbb{R}$ .

(1) هل الدالة :  $F(x) = 5x^2 - 2x + 3$  هي دالة أصلية للدالة  $f(x) = 10x - 2$  على  $\mathbb{R}$ .

(2) حدد جميع الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**03. الدالة الأصلية  $G(x)$  حيث:  $G(x_0) = y_0$ .**

- ❖ **نشاط:** لنعبر الدالة العددية المعرفة ب:  $f(x) = 2x + 3$ .
- (1) حدد الدوال الأصلية ل  $f$  :
- (2) حدد دوال الأصلية  $G$  ل  $f$  (إذا كان ممكن) حيث  $G(1) = 7$ .
- (3) كم من دالة تحقق ذلك ؟

❖ **خاصية**

لتكن  $f$  دالة عددية تقبل دالة أصلية  $F$  على مجال  $I$ . ليكن  $x_0$  من  $I$  و  $y_0$  من  $\mathbb{R}$ .

توجد دالة أصلية وحيدة  $G$  للدالة  $f$  على المجال  $I$  حيث:  $G(x_0) = y_0$ .



❖ مثال: نحدد الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = x^3 - 2x + 3$  و التي تأخذ القيمة  $-7$  عند  $0$ .

**04.** الاتصال و الدوال الأصلية:

❖ خاصية :

كل دالة متصلة  $f$  على مجال  $I$  تقبل دالة أصلية  $F$  على  $I$ .

❖ مثال 1: كل دالة حدودية تقبل دالة أصلية على  $\mathbb{R}$ .

❖ مثال 2: كل دالة جذرية تقبل دالة أصلية على مجموعة تعريفها.

❖ مثال 3:  $f(x) = \sqrt{x}$  تقبل دالة أصلية على  $[0, +\infty[$ .

**05.** دالة أصلية: لمجموع دالتين- جداء دالة في عدد حقيقي  $\alpha$

❖ نشاط:

$F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$ ،  $G$  دالة أصلية للدالة  $g$  على  $I$ .

(1) حدد دالة أصلية لدالة  $f + g$ .

(2) حدد دالة أصلية لدالة  $\alpha \times f$ .

❖ خاصية

إذا كانت  $G$  و  $F$  دالتين أصليتين للدالتين  $f$  و  $g$  على مجال  $I$  على التوالي و  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

▪  $F + G$  هي دالة أصلية ل  $f + g$ .

▪  $\alpha \times F$  هي دالة أصلية ل  $\alpha \times f$ .

❖ مثال: لنعبر الدوال:  $so(xg) = ( ) = 3x \times x$  و  $f(x) = 3x$

أوجد الدوال الأصلية للدوال السابقة.

**II.** الدوال الأصلية و العمليات: (جدول 1 ورقة التمارين)

الدالة $h$	دالة الأصلية ل $h$ هي $H$
$h = f' + g'$	$H = f + g$
$h = \alpha f'$	$H = \alpha f$
$h = f' \times g + f \times g'$	$H = f \times g$
$h = -\frac{g'}{g^2}$	$H = \frac{1}{g}$
$h = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$	$H = \frac{f}{g}$
$h = f' \times f^n$ مع $n \neq -1$	$H = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$
$h = f' \times f^r$ مع $r \neq -1$	$H = \frac{1}{r+1} f^{r+1}$
$h = f' \times g' \circ f$	$H = g \circ f$
$h = f'(ax + b)$ مع $a \neq 0$	$H = \frac{1}{a} f(ax + b)$



## III. جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية: (جدول 2 ورقة التمارين)

الدالة f	الدوال الأصلية ل f
$f(x) = a; (a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax + c$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$f(x) = x^r; (r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + c$
$f(x) = \sin(ax + b) \ a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax + b) + c$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + c$
$f(x) = \cos(ax + b) \ a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax + b) + c$
$f(x) = 1 + \tan^2(x)$	$F(x) = \tan(x) + c$
$f(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{f(x)} + c$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$

ملحوظة: C عدد حقيقي .