الحسَاب التكامُلي

I. تكامل دالة متصلة على مجال:

1. تعريف :

لتكن f **دالة متصلة على مجال** $[a,b]$ **و** F **دالة أصلية لها على** $[a,b]$.

تكامل f **من** a **إلى** b **هو العدد الحقيقي :** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

3. خاصيات :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. خطانية التكامل :

خاصية :

لتكن f **و** g **دالتان متصلتان على المجال** $[a,b]$ **.لدينا :**

- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

II. التكامل و الترتيب :

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $\left[a,b\right]$. لدينا :

- إذا كانت $f \geq 0$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f \leq 0$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f \leq g$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $\left[a,b\right]$. العدد $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $\left[a,b\right]$
- يوجد على الأقل عدد c من $\left[a,b\right]$ بحيث : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

III. تقنيات حساب التكامل :

أ. باستعمال دالة أصلية : **سبق الحديث عنها في بداية الدرس**

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

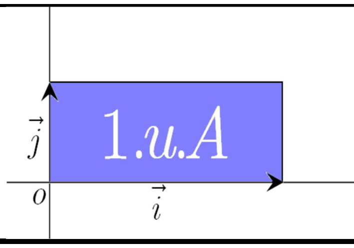
IV. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة O

و المتجهتين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$1u.A=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$



خاصية 1:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b|f(x)|dx\right)u.A$$

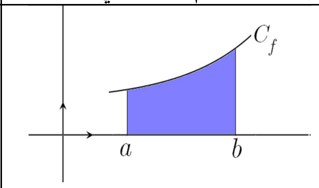
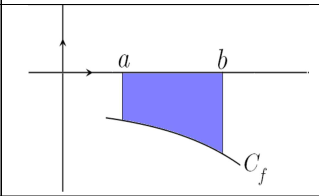
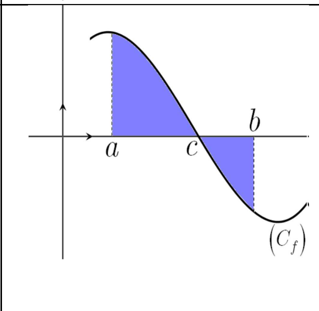
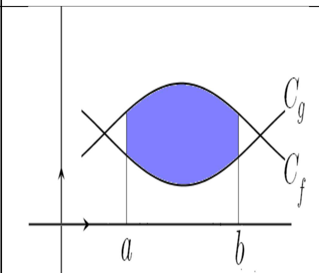
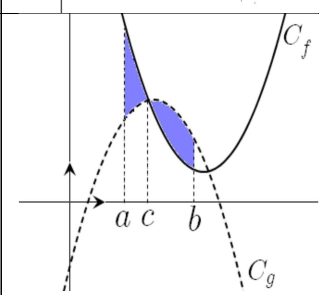
خاصية 2:

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

حالات خاصة :

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	**f موجبة على المجال** $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	**f سالبة على المجال** $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• **f موجبة على المجال** $[a,c]$ **و** • **f سالبة على المجال** $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b -f(x)dx\right)u.A$
	(C_f) **يوجد فوق** (C_g) **على المجال** $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$
	• (C_f) **يوجد فوق** (C_g) **على المجال** $[a,c]$ **و** • (C_f) **يوجد تحت** (C_g) **على المجال** $[c,b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx + \int_c^b (g(x)-f(x))dx\right)u.A$

‎.7 حساب الحجوم :

خاصية 1:

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$
إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم.

خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :
$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم