

**01**

1. حدد قيمة حقيقة العبارات التالية: $p \wedge (p \vee q)$ مع p صحيحة .
2. f دالة من مجال I ضمن \mathbb{R} إلى \mathbb{R} . عبر باستعمال جمل عن ما يلي: $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
3. f دالة من مجال I ضمن \mathbb{R} إلى \mathbb{R} . عبر باستعمال المكملات ما يلي: f تنعدم مرة واحدة فقط على I .
4. أعط نفي العبارات التالية: $x \neq y$ و $\exists (x, y) \in I^2, f(x) = f(y)$ (أكتب النفي بثلاثة طرائق مختلفة) .
5. هل العبارة التالية: $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$ قانون منطقي حيث p و q عبارتين .

02

نعتبر العبارة P التالية: " $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \left(\sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x+y+1) \right) \Rightarrow (x=1 \text{ و } y=2)$ "

1. أكتب P بدون استعمال الرابط المنطقي \Rightarrow و كذلك عدم استعمال التعبير " إذا كانفإن..... " .
2. أكتب نفي P .
3. أكتب P باستعمال الاستلزام المضاد للعكس.
4. حدد قيمة حقيقة العبارة P .

03

1. باستعمال الاستدلال بالمثل المضاد بين أن العلاقة التالية خاطئة " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : xy = 2$ " .
2. لكل n من \mathbb{N}^* بين باستعمال الاستدلال بالتكافؤات المتتالية أن: $S_n = 1+2+\dots+n \Leftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (عدم استعمال التراجع)
3. باستعمال الاستلزام المضاد للعكس: بين: إذا كان a^2 ليس بعدد صحيح مضاعف ل 16 فإن $\frac{a}{2}$ ليس بعدد صحيح زوجي .
4. a و b عدنان معلومين من \mathbb{R}^* ؛ لنعتبر المعادلة (E) بمجهول حقيقي: $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$.
 - أ- حدد D مجموعة تعريف المعادلة (E) حسب قيم a و b .
 - ب- حل المعادلة (E) باستعمال الاستدلال بفصل الحالات .

04

1. بين أن: لكل n من \mathbb{N} أن العدد $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17.
2. f دالة عددية من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} حيث: $\forall x \in \mathbb{R} : f(2x) = f(x)$.
 - أ- ليكن x من \mathbb{R} بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : f(x) = f(2^{-n}x)$.
 - ب- استنتج: $\forall p \in \mathbb{Z} : f(x) = f(2^p x)$ (مع x من \mathbb{R})
3. n عدد صحيح طبيعي. نضع $1! = 1$ و $0! = 1$ مع $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$.
 - أ- نضع: $u_k = k!$ مع k من \mathbb{N}^* . بين أن: $u_{k+1} - u_k = k(k!)$.
 - ب- أكتب المجموع التالي: $S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + n.n!$ باستعمال u_k .
 - ج- استنتج قيمة المجموع S_n .
 - د- أكتب المجموع S_n مستعملا الرمز \sum ثم أحسب المجموع S_n مستعملا فقط الرمز \sum .



1. نحدد قيمة حقيقة العبارة $p \wedge (p \vee q)$ مع p صحيحة .

- بما أن p صحيحة فإن $(p \vee q)$ صحيحة .

p صحيحة و $(p \vee q)$ صحيحة , إذن $p \wedge (p \vee q)$ صحيحة .

2. f دالة من مجال I ضمن $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, نعبر باستعمال جمل عما يلي :

$$\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad \forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

نعبر عن هذه العبارة بأن f تزايدية قطعاً على I .

3. نعبر باستعمال المكملات عما يلي :

f تنعدم مرة واحدة فقط على I .

$$\exists ! x \in I, f(x)=0$$

4. نعطي نفي العبارة $P : x \neq y$ و $\exists (x,y) \in I^2, f(x)=f(y)$.

$$\bar{P} : x = y \text{ أو } \forall (x,y) \in I^2, f(x) \neq f(y)$$

5. ندرس هل $(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow p$ قانون منطقي :

نستدل على ذلك بفصل الحالات :

الحالة 1 : p صحيحة:

بما أن p صحيحة فإن الاستلزام $(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow p$ صحيح مهما كانت قيمة حقيقة معطيات الاستلزام $(\bar{p} \Rightarrow q)$

الحالة 2 : p خاطئة :

أ- حالة فرعية

q صحيحة إذن الاستلزام $(\bar{p} \Rightarrow q)$ صحيح ومنه :

$(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow p$ خاطئ لأن $(\bar{p} \Rightarrow q)$ صحيحة و p خاطئة

خلاصة : العبارة $(\bar{p} \Rightarrow q) \Rightarrow p$ ليست بقانون منطقي .

1. كتابة العبارة p دون استعمال الرمز \Rightarrow أو التعبير: إذا كانفإن.

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \left[\sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x+y+1) \right] \Rightarrow (x=1 \text{ و } y=2)$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: \sqrt{x} + \sqrt{y-1} \neq \frac{1}{2}(x+y+1) \text{ أو } (x=1 \text{ و } y=2)$$

2. النفي هو :

$$\exists x \in [0, +\infty[, \exists y \in [1, +\infty[: \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x+y+1) \text{ و } (x \neq 1 \text{ أو } y \neq 2)$$



3. نكتب العبارة p باستعمال الاستلزام المضاد للعكس :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[: (x \neq 1 \text{ أو } y \neq 2) \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y-1} \neq \frac{1}{2}(x+y+1)$$

4. تحديد قيمة العبارة:

$$(1): \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x+y+1) \text{ حيث } y \geq 1 \text{ و } x \geq 0$$

$$(1) \Rightarrow 2(\sqrt{x} + \sqrt{y-1}) = x+y+1 \text{ ومنه}$$

$$\Rightarrow x - 2\sqrt{x} + y - 2\sqrt{y-1} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x - 2\sqrt{x} + 1}_{(\sqrt{x}-1)^2} - 1 + 1 - 1 + y - 2\sqrt{y-1} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-1}-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = -(\sqrt{y-1}-1)^2$$

(عدد موجب يساوي عدد سالب هو 0)

$$\Rightarrow \sqrt{x}-1=0 \text{ و } \sqrt{y-1}-1=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=1 \text{ و } \sqrt{y-1}=1$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ و } y-1=1$$

$$\Rightarrow x=1 \in [0, +\infty[\text{ و } y=2 \in [1, +\infty[$$

$$\left[\sqrt{x} + \sqrt{y-1} = \frac{1}{2}(x+y+1) \right] \Rightarrow (x=1 \text{ و } y=2) \text{ ومنه}$$

خلاصة : العبارة صحيحة .

03

بما أن العبارة

1. نبين باستعمال المثال المضاد أن : $p' : "x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; xy = 2"$ خاطئة.

تبتدئ بمهما يكن x من \mathbb{R} يكفي أن نأخذ $x=0$ ومنه $0y=2$ وهذا غير ممكن .

خلاصة : العبارة p' خاطئة .

2. نبين باستعمال التكافؤات المتتالية أن $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow S_n = 1+2+\dots+n$ لدينا :

$$S_n = 1+2+\dots+n \Leftrightarrow 2S_n = 2(1+2+\dots+n)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n = (1+2+\dots+(n-1)+n)(n+(n-1)+\dots+2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n = (1+n)+(2+(n+1))+\dots+((n-1)+2)+(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n = (1+n)+(n+1)+\dots+(n+1)+(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n = n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = 1+2+\dots+n \Leftrightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ومنه}$$

خلاصة : التكافؤ صحيح.



3. نبين باستعمال الاستلزام المضاد للعكس.

$\left(\frac{a}{2}\right)$ ليس بعدد صحيح زوجي $\Rightarrow (a^2)$ ليس بعدد صحيح مضاعف ل 16
الاستلزام المضاد للعكس هو :

(a^2) عدد صحيح مضاعف ل 16 $\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)$ عدد صحيح زوجي

لدينا : $\frac{a}{2} = 2k \quad / (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)$ عدد صحيح زوجي

$$\frac{a}{2} = 2k \Rightarrow a = 4k$$

$$\Rightarrow a^2 = 16k^2$$

و بالتالي a^2 عدد صحيح مضاعف ل 16.

اذن : (a^2) عدد صحيح مضاعف ل 16 $\Rightarrow \left(\frac{a}{2}\right)$ عدد صحيح زوجي

خلاصة :

$\left(\frac{a}{2}\right)$ ليس بعدد صحيح زوجي $\Rightarrow (a^2)$ ليس بعدد صحيح مضاعف ل 16

استلزام صحيح.

4. أ- تحديد مجموعة التعريف D بدلالة a و b.

$$(E) : \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}$$

ومنه و $x \neq -(a+b)$ و $x \neq 0$ $x \in D_E \Rightarrow$

حالة 1 : $a+b \neq 0$

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \{0, -(a+b)\}$$

حالة 2 : $a+b = 0$

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ب- نحل المعادلة E باستعمال الاستدلال بفصل الحالات.

$$(E) \Leftrightarrow \frac{bx+ax+ab}{abx} = \frac{1}{a+b+x}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+x)(bx+ax+ab) = abx$$

$$\Leftrightarrow abx + a^2x + a^2b + b^2x + abx + ab^2 + bx^2 + ax^2 + abx = abx$$

$$\Leftrightarrow 3abx + x^2(a+b) + x(a^2+b^2) + (a^2b+ab^2) = abx$$

$$\Leftrightarrow 2abx + x^2(a+b) + x(a^2+b^2) + (a^2b+ab^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(a+b) + x(a^2+b^2+2ab) + (a^2b+ab^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(a+b) + x(a+b)^2 + ab(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)[x^2 + x(a+b) + ab] = 0$$

الحالة 1 : $a+b = 0$

في هذه الحالة E نكتب على الشكل التالي

$$0 = 0$$

وهذا صحيح مهما تكن $x \in D_E$ $0 = 0$

الحالة 2 : $a+b \neq 0$

$$(E) \Leftrightarrow x^2 + x(a+b) + ab = 0$$



$$\text{ط1 : } x^2 - (-a-b)x + (-a) \times (-b) = 0$$

ومنه : $x_2 = -b$ و $x_1 = -a$

$$S = \{-a, -b\}$$

ط2 : لحل المعادلة : 1

$$\Delta = (a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

ومنه المعادلة لها حلان.

$$x_2 = \frac{-(a+b) + \sqrt{(a-b)^2}}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(a+b) - \sqrt{(a-b)^2}}{2}$$

$$= \frac{-(a+b) + |a-b|}{2} \quad \text{و} \quad = \frac{-(a+b) - |a-b|}{2}$$

في كلتا الحالتين : $a-b > 0$ أو $a-b < 0$

الحلين هما : $-a$ و $-b$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

الحالة 1 : $a+b=0$

$$S_E = D_f = \mathbb{R}^*$$

الحالة 2 : $a+b \neq 0$

$$S_E = \{-a, -b\}$$

04

1. نبين ان :

$$\exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

نبين أن العدد $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17.

* نستدل على ذلك بالترجع.

* نتحقق ان العلاقة (1) صحيحة من أجل $n=0$

$$\text{لدينا : } 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17$$

ومنه العلاقة صحيحة ل $n=0$

* نفترض أن العلاقة (1) صحيحة الى n .

أي أن : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17. (معطيات الترجع).

* نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ أي نبين أن :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} \\ &= 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} \\ &= 3 \times 5^{2n+1} \times 5^2 \times 2^{3n+1} \times 2^3 \\ &= 3 \times 5^{2n+1} \times (17+8) \times 2^{3n+1} \times 8 \\ &= 8(3 \times 5^{2n+1} \times 2^{3n+1}) + 17 \times 3 \times 5^{2n+1} \end{aligned}$$

$8(3 \times 5^{2n+1} \times 2^{3n+1})$ يقبل القسمة على 17 حسب معطيات الترجع

$$17k \times 3 \times 5^{2n+1}$$

ومنه : $8(3 \times 5^{2n+1} \times 2^{3n+1}) + 17 \times 3 \times 5^{2n+1}$ يقبل القسمة على 17

خلاصة : $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17.



2. أ- نبيين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(x) = f(2^{-n} x)$

نستدل على ذلك بالترجع .

* نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 0$

$$f(2^{-n}) = f(2^0 x)$$

$$= f(x)$$

ومنه العلاقة صحيحة لـ $n = 0$

* نفترض أن العلاقة صحيحة الى n أي: $f(x) = f(2^{-n} x)$

* نبين أن العلاقة p صحيحة لـ 1.

$$f(x) = f(2^{-n-1} x)$$

$$f(2^{-n-1} x) = f(2 \times 2^{-n-1} x)$$

$$= f(2^{-n} x)$$

$$f(2^{-n-1} x) = f(x). \quad (\text{حسب فرضية الترجع})$$

ومنه العبارة صحيحة لـ $n + 1$.

خلاصة : العلاقة p صحيحة.

2. ب- نستنتج أن $(\forall p \in \mathbb{Z}) f(x) = f(2^p x)$

$$p \in \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+ \quad \text{لدينا}$$

* **حالة (1) :** $p \in \mathbb{Z}^+$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(2^{-p} (2^p x))$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(2^p x)$$

$$(p \in \mathbb{Z}^+) \text{ و } (p = n)$$

ان العلاقة صحيحة لـ $p \in \mathbb{Z}^+$

* **حالة (2) :** $p \in \mathbb{Z}^-$

$$f(2^p x) = f(2^{-p} x)$$

$$= f(2^{-p} x)$$

$$= f(x)$$

$$(-p \in \mathbb{Z}^+) \text{ و } (-p = n)$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}^- : f(x) = f(2^p x) \quad \text{ومنه}$$

خلاصة : إذا حسب فصل الحالات فان : $\forall p \in \mathbb{Z} : f(x) = f(2^p x)$

3. أ- نبيين أن : $U_{k+1} - U_k = k(k!)$

$$U_k = k! \quad \text{لدينا}$$

$$U_{k+1} - U_k = k(k!) = (k+1)! - k! = k!(k+1-1) = k(k!)$$

خلاصة : $U_{k+1} - U_k = k(k!)$

ب-وج- نكتب S_n باستعمال U_k ثم استنتج قيمتها :



$$\begin{aligned}
 S_n &= 1.1! + 2.2! + 3.3! + \dots + (n-1)n + n.n! \\
 &= (\cancel{U_2} - U_1) + (\cancel{U_3} - \cancel{U_2}) + (\cancel{U_4} - \cancel{U_3}) + \dots + (\cancel{U_n} - \cancel{U_{n-1}}) + (U_{n+1} - \cancel{U_n}) \\
 &= -U_1 + U_{n+1} \\
 &= -1 + (k+1)!
 \end{aligned}$$

د- أكتب المجموع S_n مستعملا \sum ثم أحسب مستعملا فقط \sum :
لدينا :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{j=1}^{j=n} j(j!) \\
 &= \sum_{j=1}^{j=n} (U_{j+1} - U_j) \\
 &= \sum_{j=1}^{j=n} U_{j+1} - \sum_{j=1}^{j=n} U_j \\
 &= \sum_{i=2}^{i=n+1} U_{j+1} - \sum_{j=1}^{j=n} U_j \left(\begin{array}{l} i=j+1 \Rightarrow \\ j=1 \Rightarrow i=2 \\ j=n \Rightarrow i=n+1 \end{array} \right) \\
 &= \left(U_{n+1} + \sum_{i=2}^{i=n} U_i \right) - \left(U_1 + \sum_{j=2}^{j=n} U_j \right) \\
 &= U_{n+1} - U_1 + \sum_{i=2}^{i=n} U_i - \sum_{i=2}^{i=n} U_i \\
 &= U_{n+1} - U_1 \\
 &= (n+1)! - 1
 \end{aligned}$$

و بالتالي : $S_n = (n+1)! - 1$

خلاصة : $S_n = (n+1)! - 1$

و شكرا .

من طرف التلميذ : ياسين المسعودي.

ثانوية عمر بن عبد العزيز 2014-2015 | أولى علوم رياضية 1 .

التاريخ : 23/11/2014 09:54