

سلسلة 2	مبادئ في المنطق	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
<p>تمرين 1: ليكن x و y عددين حقيقيين</p> <p>بين أن: $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$</p>		
<p>تمرين 2: بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$</p>		
<p>تمرين 3: ليكن x عددا حقيقيا، نضع: $H(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$</p> <p>1) بين أن: $H(x) = x^5(x^3 - 1) + x^2 - x + 1$ و أن: $H(x) = x^2(x^6 - x^3 + 1) + 1 - x$</p> <p>2) استنتج أن: $\forall x \in \mathbb{R} H(x) > 0$</p>		
<p>تمرين 4: حل في \mathbb{R} المتراجحة: $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$</p>		
<p>تمرين 5: a و b و c قياسات أضلاع مثلث. بين أن: $a + b + c = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$</p>		
<p>تمرين 6: بين بالترجع أن:</p> <p>1) $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 6 حيث $n \in \mathbb{N}$</p> <p>2) $\forall n \in \mathbb{N}^* 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$</p> <p>3) 9 يقسم العدد $4^n + 6n - 1$ حيث $n \in \mathbb{N}$</p> <p>4) $\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$</p>		
<p>تمرين 7: - مزيدا من التفكير -</p> <p>1) ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a - b < \varepsilon$ ، $\forall \varepsilon > 0$ ، بين أن: $a = b$</p> <p>2) ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، بين أن: $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} \in \mathbb{N}$</p> <p>3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{N}$</p>		

تمرين 1: ليكن x و y عددين حقيقيين، لنبين أن: $x + y = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$

1) لدينا من جهة:

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = (x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = x^2 + 1 - x^2 = 1$$

2) و من جهة أخرى:

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) \times (-y + \sqrt{y^2 + 1}) = (-y + \sqrt{y^2 + 1}) \\ (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) \times (-x + \sqrt{x^2 + 1}) = (-x + \sqrt{x^2 + 1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = -y + \sqrt{y^2 + 1} \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = -x + \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = -y - x + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 0 \Rightarrow x + y = 0$$

بالتالي: $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$

استعمال التكافؤات فقط أمر جد صعب، لذلك نلجأ إلى استعمال استلزامين ونبدأ دائما بأسهلها.

تمرين 2: نفترض أن: $\exists n \in \mathbb{N}^* \sqrt{\frac{n}{n+2}} \in \mathbb{Q}$

إذن يوجد $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ حيث: $\sqrt{\frac{n}{n+2}} = \frac{p}{q}$ و $p \wedge q = 1$

$$\sqrt{\frac{n}{n+2}} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{n}{n+2} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow nq^2 = np^2 + 2p^2 \Rightarrow n(q^2 - p^2) = 2p^2$$

إذن: $n(q^2 - p^2)$ عدد زوجي

إذن أحد العددين $q^2 - p^2$ أو n زوجي (لأنهما إن كانا معا فرديين فسيكون جذاؤهما فرديا)

■ إذا كان $q^2 - p^2$ زوجيا

فإن p و q سيكون لهما نفس الزوجية (فرديان معا أو زوجيان معا) (لأنه إن كانا مختلفا الزوجية

فسيكون مربعاهما أيضا مختلفا الزوجية وبذلك يكون فرق مربعيهما عددا فرديا)

و بما أنهما أوليان فيما بينهما فلا يمكن أن يكونا زوجيان معا (لأنه سيكون 2 قاسما مشتركا لهما)

إذن سنستنتج أنهما فرديان معا.

إذن: $p = 2a + 1$ و $q = 2b + 1$ حيث $(a, b) \in \mathbb{N}^2$

$$n(q^2 - p^2) = 2p^2 \Rightarrow n(4b^2 + 4b + 1 - 4a^2 - 4a - 1) = 2p^2 \Rightarrow 2n(b^2 + b - a^2 - a) = p^2$$

إذن p زوجي وهذا يناقض كونه فرديا

■ إذا كان n زوجيا فإن $n = 2m$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$

$$\text{إذن: } n(q^2 - p^2) = 2p^2 \Rightarrow m(q^2 - p^2) = p^2 \Rightarrow m(q^2 - p^2) = p^2 - q^2 + q^2 \Rightarrow (q^2 - p^2)(m+1) = q^2$$

من $m(q^2 - p^2) = p^2$ و $(q^2 - p^2)(m+1) = q^2$ نستنتج أن $(q^2 - p^2)$ قاسم مشترك لـ p^2 و q^2

سنبرهن الآن أن: $p \wedge q = 1 \Rightarrow p^2 \wedge q^2 = 1$

إذا كان p و q أوليين فيما بينهما فإن تفكيكهما الأولي لا يحتوي على أي عدد أولي مشترك عندما نحسب مربعيهما فإننا لن نجد أيضا أي عدد أولي مشترك، مما يعني أنهما أوليان فيما بينهما. الآن بما أن $p \wedge q = 1$ فإن: $p^2 \wedge q^2 = 1$ و بما أن $(q^2 - p^2)$ قاسم مشترك موجب لهما فإن: $q^2 - p^2 = 1$

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ وهذا يناقض } \begin{cases} q+p=1 \\ q-p=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q=2 \\ 2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ p=0 \end{cases} \Rightarrow n(1-0)=0 \Rightarrow n=0 \text{ منه: } (q+p)(q-p)=1$$

في جميع الحالات نجد تناقضا، بالتالي افتراضنا غير صحيح، ومنه: $\forall n \in \mathbb{N}^* \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

تمرين صعب يتطلب الامام بقواعد الحسابيات، يمكن حله بسهولة بالاعتماد على قواعد سيتم دراستها لاحقا في درس الحسابيات، لكنني أثرت إدراجه في هذه السلسلة لكونه يتضمن مجموعة من الأفكار يمكن استغلالها لحل تمارين مشابهة تعتمد في حلها على زوجية وفردية الأعداد الصحيحة الطبيعية وكذا الأعداد الأولية فيما بينها.

تمرين 3: $H(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$

1) لدينا: $H(x) = x^5(x^3 - 1) + x^2 - x + 1$ و $H(x) = x^2(x^6 - x^3 + 1) + 1 - x$ (سؤال جد سهل)

2) لنبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) > 0$

■ إذا كان $x \geq 1$ ، فإن: $x^5(x^3 - 1) \geq 0$ ، و $x^2 - x + 1 > 0$ (لأن: $\Delta = -3 < 0$)

إذن: $H(x) = x^5(x^3 - 1) + x^2 - x + 1 > 0$

■ إذا كان $x < 1$ ، فإن: $1 - x > 0$ ، و $x^6 - x^3 + 1 = (x^3)^2 - (x^3) + 1 > 0$ (لأن: $\Delta = -3 < 0$)

إذن: $H(x) = x^2(x^6 - x^3 + 1) + 1 - x > 0$

في جميع الحالات نستنتج أن: $H(x) > 0$

البرهان بفصل الحالات مفيد جدا في وضعيات كثيرة خصوصا إذا استطعنا إيجاد الحالات المناسبة و استغلال معطيات كل حالة على حدة.

تمرين 4: لنحل المتراجحة (E): $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

مجموعة صلاحية المتراجحة هي: $D = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0 \text{ et } 3-x \geq 0\} = [-1; 3]$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3-x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x+1$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} - 2x \geq 0 \\ \frac{49}{16} - 7x + 4x^2 > x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{8} \\ 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0 \end{cases}$$

محددة الحدودية: $4x^2 - 8x + \frac{33}{16}$ هي: $\Delta = 64 - 33 = 31$ وجذراها هما: $x_1 = \frac{8 + \sqrt{31}}{8}$ و $x_2 = \frac{8 - \sqrt{31}}{8}$

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{8} \\ x < \frac{8 - \sqrt{31}}{8} < \frac{7}{8} \text{ ou } x > \frac{8 + \sqrt{31}}{8} > \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{8 - \sqrt{31}}{8} \text{ منه: } x < \frac{8 - \sqrt{31}}{8}$$

$$\text{بالتالي: } S = \left[-1; \frac{8 - \sqrt{31}}{8} \right]$$

أثناء حل المتراجحات يجب استعمال التكافؤ لأنه يعكس المعادلات التحقق من صحة النتائج أمر غير يسير لأن الحلول غالبا ما تكون مجالات، كما أنه يجب مراعاة مجموعة الصلاحية (ندعوها في الدوال مجموعة التعريف).

تمرين 5: a و b و c قياسات أضلاع مثلث. لنبين أن: $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}(a+b+c)^2$

$$\begin{cases} a^2 < ab + ac \\ b^2 < ab + bc \\ c^2 < ac + bc \end{cases} \quad \begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

لدينا a و b و c قياسات أضلاع مثلث إذن: $a < b + c$ ، $b < a + c$ ، $c < a + b$ منه:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 < a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) < (a+b+c)^2$$

منه: $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}(a+b+c)^2$ بالتالي:

هذا التمرين يتضمن معلومتين أساسيتين يجهلها كثير من التلاميذ، الأولى المتعلقة بأضلاع مثلث والثانية المتطابقة الهامة

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

تمرين 6:

1) لنبين بالترجع أن: $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 6 حيث $n \in \mathbb{N}$

• بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن 0 مضاعف لـ 6

• نفترض أن $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6، ولنبين أن $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

لدينا $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6، إذن: $n(n+1)(n+2) = 6a$ حيث $a \in \mathbb{N}$

$$(n+1)(n+2)(n+3) = (n+3)(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2) = 6a + 3(n+1)(n+2)$$

وبما أن جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي فإن: $(n+1)(n+2) = 2b$ حيث $b \in \mathbb{N}$

$$(n+1)(n+2)(n+3) = 6a + 6b = 6(a+b)$$

منه: $(n+1)(n+2)(n+3) = 6(a+b)$ و حيث أن $(a+b) \in \mathbb{N}$

فإن: $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

2) لنبين بالترجع أن: $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

• بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة لأن $1^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$

• نفترض أن $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ولنبين أن $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6}(n(2n+1) + 6(n+1))$$

وهذا ينهي البرهان

$$= \frac{n+1}{6}(2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 3n + 6)}{6}$$

لدينا

$$= \frac{(n+1)(n+1)(2n(n+2) + 3(n+2))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

3) لنبين بالترجع أن: 9 يقسم العدد $4^n + 6n - 1$ حيث $n \in \mathbb{N}$

• بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن $4^0 + 6 \times 0 - 1 = 0$ يقسم 9

• نفترض أن $4^n + 6n - 1$ يقسم 9، ولنبين أن $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$ يقسم 9

لدينا 9 يقسم $4^n + 6n - 1$ ، إذن: $4^n + 6n - 1 = 9a$ حيث $a \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 6(n+1) - 1 &= 4(4^n) + 6n + 5 = 4(9a - 6n + 1) + 6n + 5 \\ &= 36a - 24n + 4 + 6n + 5 = 36a - 18n + 9 \\ &= 9(4a - 2n + 1) \end{aligned}$$

وبما أن: $a \in \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}$ فإن: $(4a - 2n + 1) \in \mathbb{Z}$ ، إذن 9 يقسم $4^{n+1} + 6(n+1) - 1$

$$4 \text{ لنبين بالترجع أن: } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

• بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1}$

• نفترض أن $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ونبين أن: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+2)} \quad \text{لدينا:}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

• مبدأ الترجع من أساسيات البرهان الرياضي كلما تعلق الأمر بالأعداد الصحيحة الطبيعية

• هذا المبدأ يكون هو الوسيلة الوحيدة للبرهان في كثير من الحالات

• هناك أنواع أخرى للترجع لا نستعملها إلا نادرا (في أولبياد الرياضيات أو ربما في الفروض المنزلية) أذكر منها مبدأ الترجع القوي و الترجع المزدوج.

• أثناء الافتراض في الترجع نحذف المكتم الكوني لأننا بصدد التعامل مع حالة من حالات العبارة المراد البرهان على صحتها.

تمرين 7:

1) a و b عددينان حقيقيان حيث $|a-b| < \varepsilon$ ، $\forall \varepsilon > 0$ ، لنبين أن: $a = b$

لنفترض أن $a \neq b$ إذن $a-b \neq 0$ إذن: $|a-b| > 0$ منه: $\frac{|a-b|}{2} > 0$

الآن حسب المعطيات نأخذ: $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ فنجد: $|a-b| < \frac{|a-b|}{2}$ منه: $2|a-b| < |a-b|$ منه $|a-b| < 0$

وهذا غير ممكن، بالتالي: $a = b$

2) ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، لنبين أن: $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} \in \mathbb{N}$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n(n+3)(n+1)(n+2)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$

$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = (n^2+3n+1)^2$$

بالتالي: $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = n^2+3n+1 \in \mathbb{N}$

3) لنبين أن $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

نفترض أن: $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \in \mathbb{N}$ ، $\exists n \in \mathbb{N}$ ، إذن: $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = a$ حيث $a \in \mathbb{N}$

$$\text{منه : } n + 2\sqrt{n(n+1)} + n + 1 = a^2 \text{ : منه } 2\sqrt{n(n+1)} = a^2 - 2n - 1$$

$$\text{نضع : } a^2 - 2n - 1 = b \text{ إذن : } 2\sqrt{n(n+1)} = b \text{ و } b \in \mathbb{N}$$

$$\text{منه : } 4n^2 + 4n = b^2 \text{ منه : } 4n^2 + 4n + 1 = b^2 + 1 \text{ منه : } (2n+1)^2 = b^2 + 1 \text{ منه : } (2n+1)^2 - b^2 = 1$$

$$\text{منه : } 4n + 2 = 2 \text{ منه } n = 0 \text{ وهذا يناقض } n \in \mathbb{N}^* \text{ منه : } \begin{cases} 2n+1+b=1 \\ 2n+1-b=1 \end{cases} \text{ منه : } (2n+1+b)(2n+1-b)=1$$

$$\text{بالتالي : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \notin \mathbb{N}$$