

سلسلة 1	مبادئ في المنطق	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية
<p>تمرين 1: اكتب العبارات التالية مستعملا المكملين الكوني و الوجودي:</p> <p>(A₁): "مهما يكن العدد الموجب a و مهما يكن العدد السالب b فإن $a+b$ سالب".</p> <p>(A₂): "يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب x يكون مربعه أكبر من 34".</p> <p>(A₃): "يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد n مربعه أصغر من 78 و أكبر من 23".</p> <p>(A₄): "مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n فإنه يوجد على الأقل عدد صحيح طبيعي m مربعه n".</p> <p>(A₅): "يوجد عدد حقيقي a بحيث مهما يكن العدد الحقيقي x فإن $x^2 \geq a$".</p> <p>(A₆): "يوجد عدد حقيقي b و يوجد عدد حقيقي x يحققان: $b \leq x$".</p>		
<p>تمرين 2: اعط نفي العبارات دون تحديد حقيقتها:</p> <p>(P₁): $\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad x^3 = 8$</p> <p>(P₂): $\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} + x \geq 2$</p> <p>(P₃): $\exists a > 0 \quad \exists b > 0 \quad 2ab = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$</p> <p>(P₄): $\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} \neq 7$</p> <p>(P₅): $\exists y \in [1; 4] \quad 5 < y \leq 13$</p> <p>(P₆): $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$</p> <p>(P₇): $\exists p \in \mathbb{N} \quad (p^2 = 5 \text{ ou } p^2 > 10)$</p> <p>(P₈): $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left(x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1 \right)$</p> <p>(P₉): $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$</p>		
<p>تمرين 3: حدد حقيقة العبارات التالية:</p> <p>(P₁): $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$</p> <p>(P₂): $\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$</p> <p>(P₃): $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = x$</p> <p>(P₄): $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x = -1)$</p> <p>(P₅): $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$</p> <p>(P₆): $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$</p> <p>(P₇): $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq a$</p> <p>(P₈): $\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 \quad (2a+1)^{2015} = 2014b$</p>		
<p>تمرين 4: لتكن P و Q عبارتين. مستعملا جدول الحقيقة بين أن العبارتان: $(P \text{ و } Q) \Rightarrow P$ و $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$ قوانين منطقية</p>		

تمرين 1: اكتب العبارات التالية مستعملا الكممين الكوني و الوجودي :

(A_1) : "مهما يكن العدد الموجب a و مهما يكن العدد السالب b فإن $a+b$ سالب".

$$A_1: \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- \quad a+b \leq 0 \quad \text{أو أيضا} \quad A_1: \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall b \in \mathbb{R}^- \quad a+b \leq 0$$

(A_2) : "يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب x يكون مربعه أكبر من 34".

$$A_2: \quad \exists x \in \mathbb{R}^+ \quad x^2 > 34$$

(A_3) : "يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد n مربعه أصغر من 78 وأكبر من 23".

$$A_3: \quad \exists! n \in \mathbb{N} \quad 23 < n^2 < 78$$

(A_4) : "مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n فإنه يوجد على الأقل عدد صحيح طبيعي m مربعه n ".

$$A_4: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m^2 = n$$

(A_5) : "يوجد عدد حقيقي a بحيث مهما يكن العدد الحقيقي x فإن $x^2 \geq a$ ".

$$A_5: \quad \exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq a$$

(A_6) : "يوجد عدد حقيقي b و يوجد عدد حقيقي x يحققان: $b \leq x$ ".

$$A_6: \quad \exists (b,x) \in \mathbb{R}^2 \quad b \leq x \quad \text{أو أيضا} \quad A_6: \quad \exists b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad b \leq x$$

تمرين 2: اعط نفي العبارات التالية دون تحديد قيمة حقيقتها :

نفيها	العبارة
$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x^3 \neq 8$	$\exists x \in \mathbb{R}^+ \quad x^3 = 8$
$\exists x > 0 \quad \frac{1}{x} + x < 2$	$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} + x \geq 2$
$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad 2ab \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	$\exists a > 0 \quad \exists b > 0 \quad 2ab = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
$\exists x > 0 \quad \frac{1}{x} = 7$	$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} \neq 7$
$\forall y \in [1;4] \quad (y \leq 5 \text{ ou } y > 13)$	$\exists y \in [1;4] \quad 5 < y \leq 13$
$\exists p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \quad \frac{p}{q} \notin \mathbb{Q}$	$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$
$\forall p \in \mathbb{N} \quad (p^2 \neq 5 \text{ et } p^2 \leq 10)$	$\exists p \in \mathbb{N} \quad (p^2 = 5 \text{ ou } p^2 > 10)$
$\exists x \in \mathbb{R}^* \quad \left(x + \frac{1}{x} = 2 \text{ et } x \neq 1 \right)$	$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \left(x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1 \right)$
$\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 0 \text{ et } x \neq 0) \text{ ou } (x = 0 \text{ et } x^2 \neq 0)$	$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

أثناء نفي عبارة رياضية يجب مراعاة القواعد التالية:

عند نفي أحد الكممين الكوني \forall أو الوجودي \exists لان نفي العبارة المرتبطة به (مثلا نفي $\forall x \in \mathbb{R}$ هي $\exists x \in \mathbb{R}$ وليس $\exists x \notin \mathbb{R}$)

لان نفي الكتابات المختصرة إلا بعد إرجاعها لصيغتها الأصلية: مثلا نفي $1 < a < 2$ هي $(a \leq 1 \text{ أو } a \geq 2)$ وليس $1 \geq a \geq 2$

لأن هذه الكتابة هي مجرد اختصار للكتابة $(a > 1 \text{ و } a < 2)$

العبارة $p \Rightarrow q$ تكافئ $\neg p$ ou q لذلك نفيها هو $p \text{ et } \neg q$

العبارة $p \Leftrightarrow q$ تكافئ $(p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)$ لذلك نفيها هو $\neg(p \Rightarrow q) \text{ ou } \neg(q \Rightarrow p)$ أي $(p \text{ et } \neg q) \text{ ou } (q \text{ et } \neg p)$

تمرين 3: حدد حقيقة العبارات التالية:

التعليل	حقيقتها	العبارة
العبارة تعني وجود عدد حقيقي مربعه يساوي -1 وهذا غير ممكن لأن مربع أي عدد حقيقي يكون دائما موجبا	خاطئة	$\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 = 0$
نأخذ مثلا : $x = 7$ و $y = -7$	صحيحة	$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$
إذا أخذنا عددا سالبا مثل $-1 \in \mathbb{R}$ فسنجد أن : $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$	خاطئة	$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = x$
$x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	صحيحة	$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x = -1)$
إذا أخذنا العدد $-2 \in \mathbb{R}$ فسنجد أن : $(-2)^2 = 4$ لكن مع ذلك $-2 \neq 2$	خاطئة	$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$
هذه المرة العبارة صحيحة لكون مجموعة الانتماء هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وهذا هو التعليل: $x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$ $\Rightarrow x-2 = 0 \text{ ou } x+2 = 0$ $\Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$ ولكون $x \in \mathbb{R}^+$ فإن الحالة $x = -2$ غير ممكنة	صحيحة	$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (x^2 = 4 \Rightarrow x = 2)$
نأخذ $a = 0$ فنجد أن العبارة تصبح $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ والتي نعلم أنها صحيحة، مما يؤكد وجود عدد حقيقي على الأقل يحقق العبارة	صحيحة	$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq a$
نعلم أن $2014b = 2 \times (1007b)$ عدد زوجي و $(2a+1)^{2015}$ عدد فردي (لأنه عبارة عن قوة عدد فردي) إذن المتساوية الموجودة بالعبارة غير ممكنة	خاطئة	$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad (2a+1)^{2015} = 2014b$

تحديد حقيقة عبارة رياضية أمر غير يسير ، يتطلب فهما و استيعاب العبارة جيدا قصد إيجاد التعليل المناسب (مثال مضاد...)

تمرين 4: لتكن P و Q عبارتين.

P	Q	$(P \text{ و } Q)$	$(P \text{ و } Q) \Rightarrow P$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

P	Q	$\neg P$	$\neg P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
F	F	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	V	V
V	V	F	V	V

بما أن العبارتان $(P \text{ و } Q) \Rightarrow P$ و $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$ صحيحتان مهما كانت حقيقة العبارتين P و Q فإنها قوانين منطقية.