السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	عموميات حول الدوال	سلسلة 2

تمرين 1 : حدد $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ في كل حالة مما يلي :

$\begin{cases} f(x)=2x+1 \\ g(x)=x^2-1 \end{cases}$ ، $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x} \\ g(x)=\dfrac{2x}{x-3} \end{cases}$ ، $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2} \end{cases}$ ، $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\sqrt{x^2-1} \end{cases}$

تمرين 2 : أوجد جدول تغيرات الدوال التالية ثم أنشئ تمثيلها البياني في م.م.م :

$f(x)=x^2+4x-1$ ، $g(x)=-2x^2+6x+1$ ، $h(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ ، $k(x)=\dfrac{x}{x+2}$

$p(x)=\sqrt{x-2}$ ، $q(x)=-2x^3$

تمرين 3 : نعتبر الدوال : $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1) حدد Df و Dg و Dh
2) بين أن f مصغورة بـ -3
3) بين أن h مصغورة بـ 1
4) اعط جدول تغيرات الدالتين f و g
5) تحقق أن : $h=g\circ f$
6) ادرس رتابة الدالة h على $-\infty;-2$ و $-2;+\infty$

تمرين 4 : نضع : $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

1) أ) ما هي طبيعة المنحنى Cf ؟
ب) حدد نقطتي تقاطع Cf ومحور الأفاصيل
ج) أنشئ Cf في معلم متعامد ممنظم
2) أنشئ Cg في المعلم السابق
3) لتكن (E) المعادلة التالية : $x^3-5x^2+7x-4=0$
أ) بين أن المعادلة (E) تكافئ : $f(x)=g(x)$
ب) استنتج مبيانيا عدد حلول المعادلة (E)

تمرين 5 : نعتبر الدالتين : $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{|x|}$ والمستقيم $(\Delta):\ y=-2x+2$

1) اعط جدول تغيرات الدالتين f و g (لاحظ أن g زوجية)
2) أنشئ في نفس المعلم (C_f) و (C_g) و (Δ)
3) حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$
4) حدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) و (Δ)
5) حل مبيانيا المتراجحات التالية : $g(x)\leq 3$ ، $g(x)\geq 2$ ، $-2x+2<f(x)<2$
6) حدد مبيانيا صور المجالات : $I=\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ و $I=\left[\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ بالدالة g
وصور المجالات : $[-2;1]$ و $[2;+\infty[$ و $]-\infty;0]$ بالدالة f
7) حدد تغيرات الدالة $h(x)=x-\sqrt{x}$ على مجموعة تعريفها (اكتب h على شكل مركب دالتين)

سلسلة 2	عموميات حول الدوال حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1 : حدد $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$ في كل حالة مما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=2x+1 \\ g(x)=x^2-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) = 2g(x)+1 \\ &= 2(x^2-1)+1 \\ &= 2x^2-2+1 \\ &= 2x^2-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = (f(x))^2-1 \\ &= (2x+1)^2-1 \\ &= 4x^2+4x+1-1 \\ &= 4x^2+4x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x} \\ g(x)=\dfrac{2x}{x-3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{2x}{x-3}+1}{\frac{2x}{x-3}} = \frac{\frac{2x+x-3}{x-3}}{\frac{2x}{x-3}} \\ &= \frac{3x-3}{x-3}\times\frac{x-3}{2x} = \frac{3x-3}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = \frac{2f(x)}{f(x)-3} \\ &= \frac{2\frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x}-3} = \frac{\frac{2x+2}{x}}{\frac{x+1-3x}{x}} \\ &= \frac{2x+2}{x}\times\frac{x}{-2x+1} = \frac{2x+2}{-2x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) = \sqrt{1+(g(x))^2} \\ &= \sqrt{1+\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{x^4+(x^2+3)^2}{x^4}} \\ &= \sqrt{\frac{x^4+x^4+6x^2+9}{x^4}} \\ &= \frac{\sqrt{2x^4+6x^2+9}}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = \frac{(f(x))^2+3}{(f(x))^2} \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2+3}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} \\ &= \frac{1+x^2+3}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2+4}{x^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+x^2} \\ g(x)=\sqrt{x^2-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x)) = \sqrt{1+(g(x))^2} \\ &= \sqrt{1+x^2-1} = \sqrt{x^2} = |x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2-1} \\ &= \sqrt{1+x^2-1} = \sqrt{x^2} = |x| \end{aligned}$$

ستلاحظ من خلال الأمثلة المقدمة أنه عموما يكون $f\circ g(x) \neq g\circ f(x)$ ، لكن يمكن أن نحصل على التساوي في بعض الحالات.

تمرين 2 :

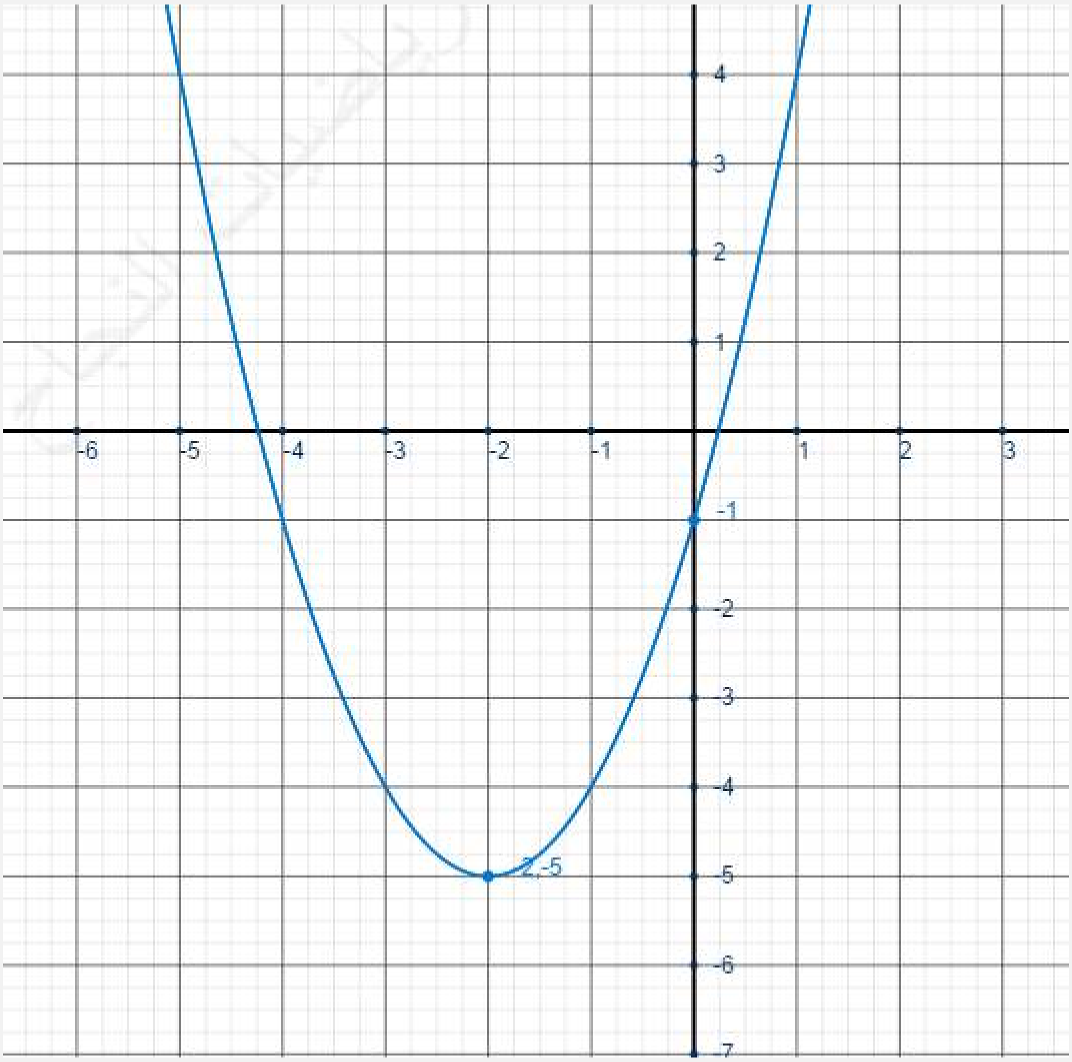
$$f(x)=x^2+4x-1$$

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$$

إذن :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-5	↗

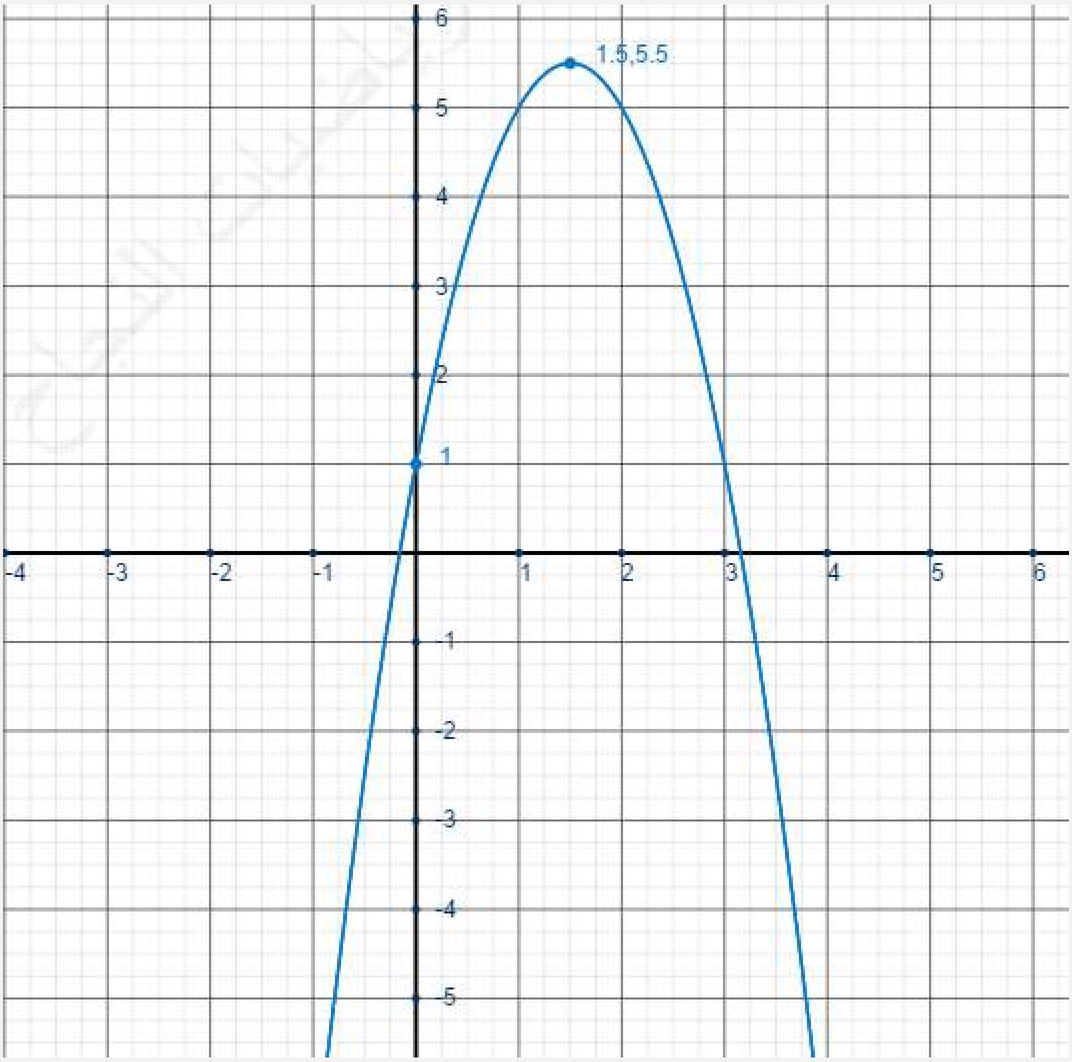


$\boxed{g(x)=-2x^2+6x+1}$

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه : $\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$

إذن :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$



لاحظ أن رتابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

$$\boxed{h(x)=\frac{3x-1}{x-2}}$$

h عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

و لدينا :

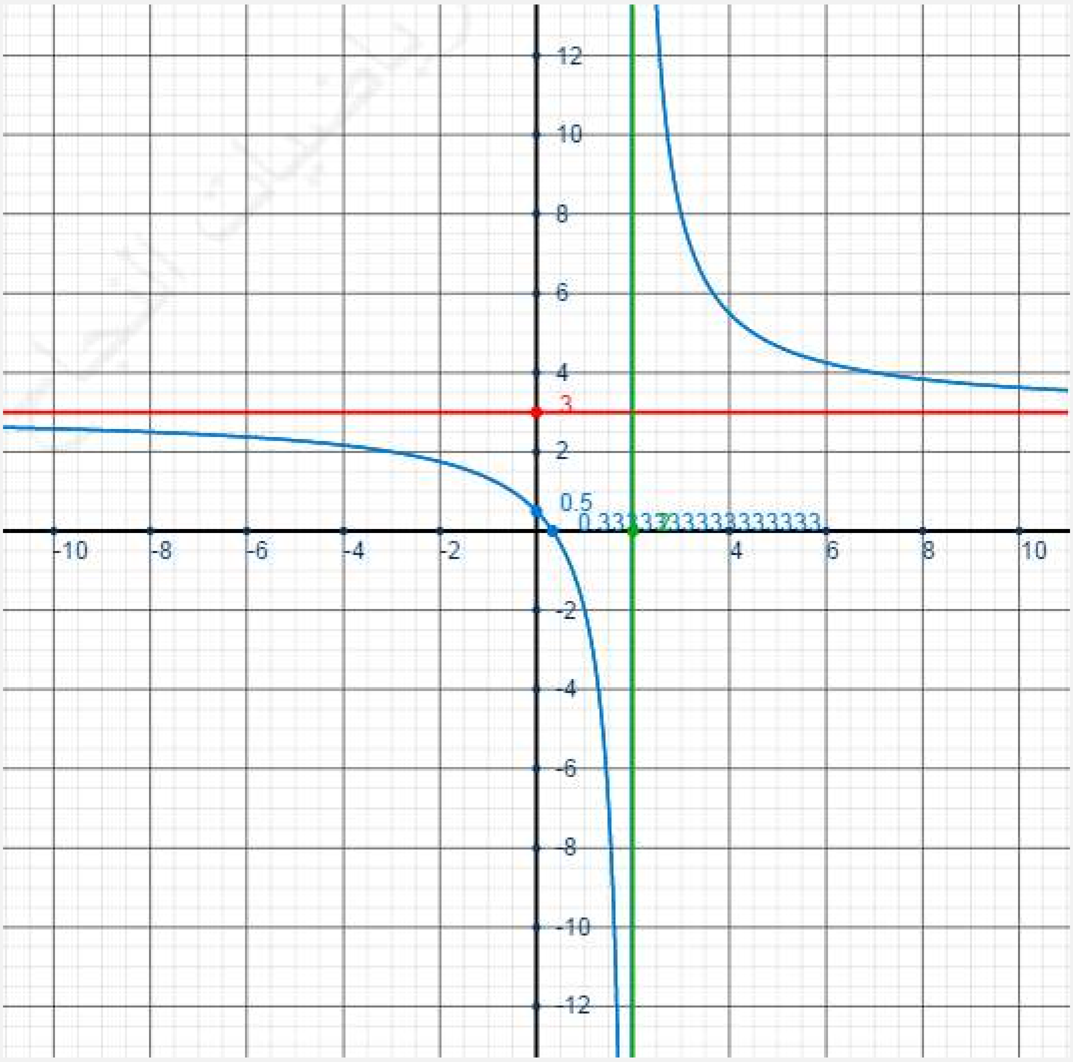
$$h(x)-3=\frac{3x-1}{x-2}-3$$

$$h(x)-3=\frac{3x-1-3x+6}{x-2}$$

$$h(x)-3=\frac{5}{x-2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(2,3)$ و بما أن $5>0$ فالدالة تناقصية

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$



$$\boxed{k(x)=\frac{x}{x+2}}$$

k عبارة عن دالة على شكل $\frac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول:

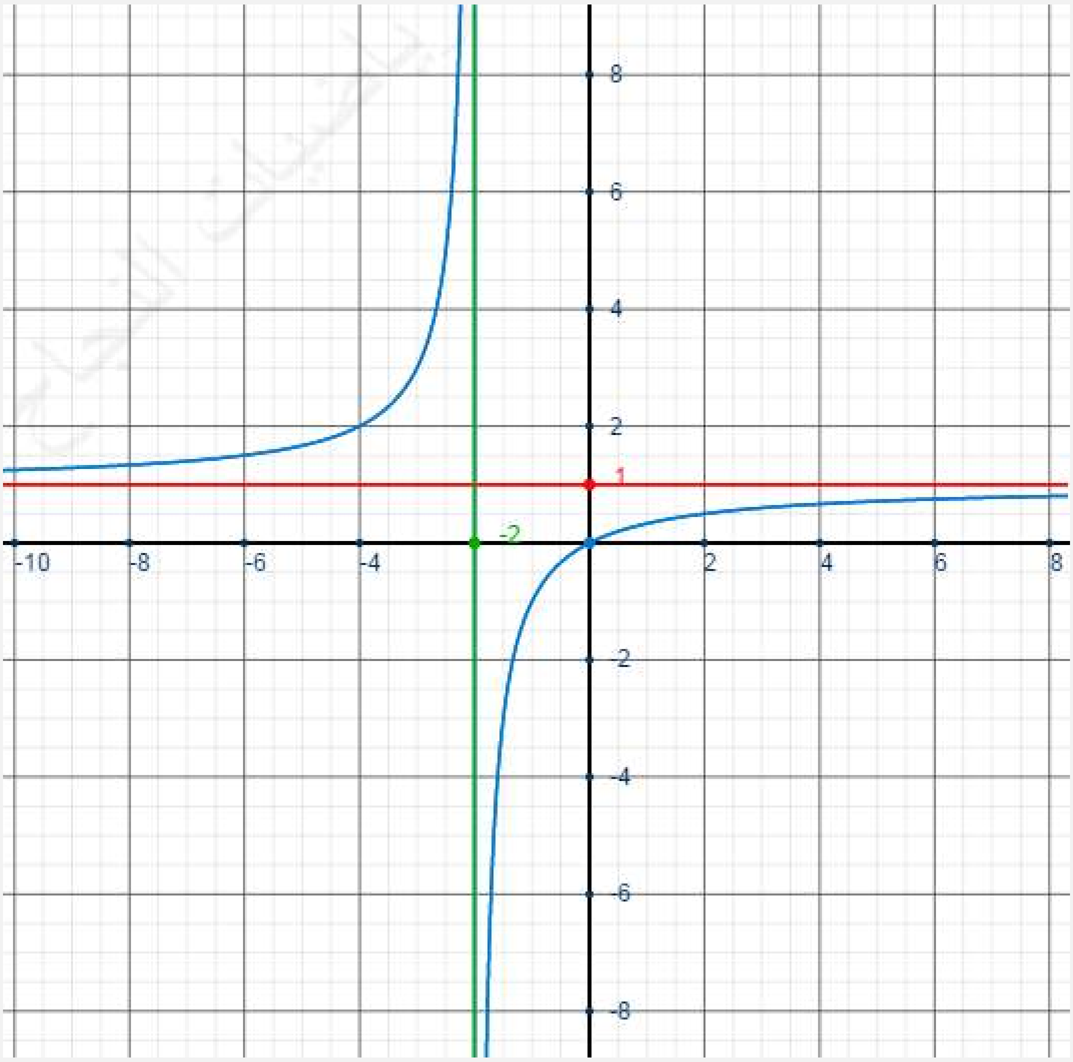
$$k(x)-1=\frac{x}{x+2}-1$$

و لدينا : $k(x)-1==\frac{x-x-2}{x+2}$

$$k(x)-1==\frac{-2}{x+2}$$

إذن الهذلول مركزه : $\Omega(-2,1)$ و بما أن $-2<0$ فالدالة تزايدية

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$k(x)$	↗	‖	↗

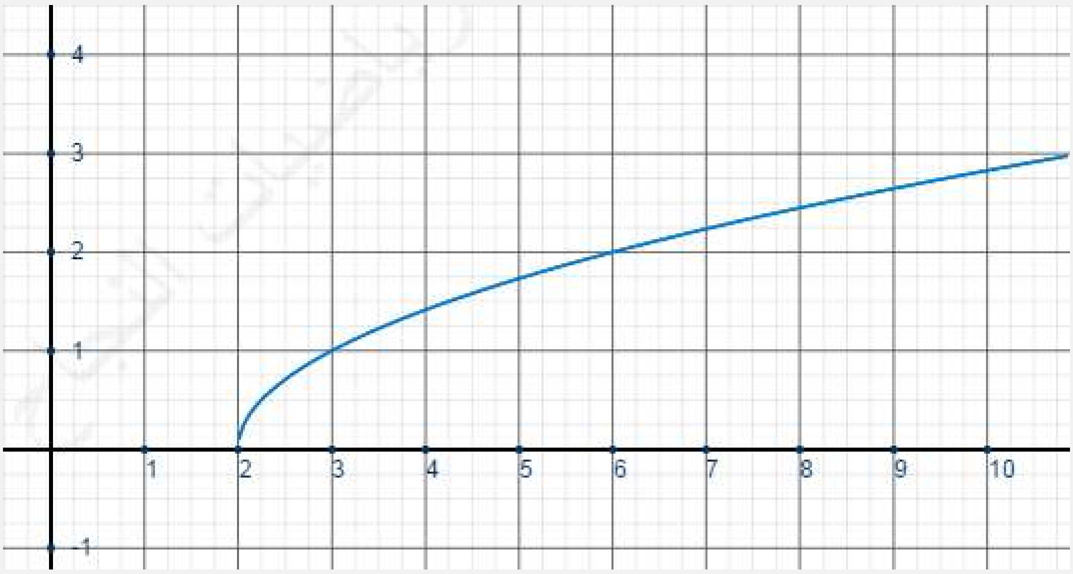


لاحظ أنه لتحديد مركز الهذلول نحسب الفرق $\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}$

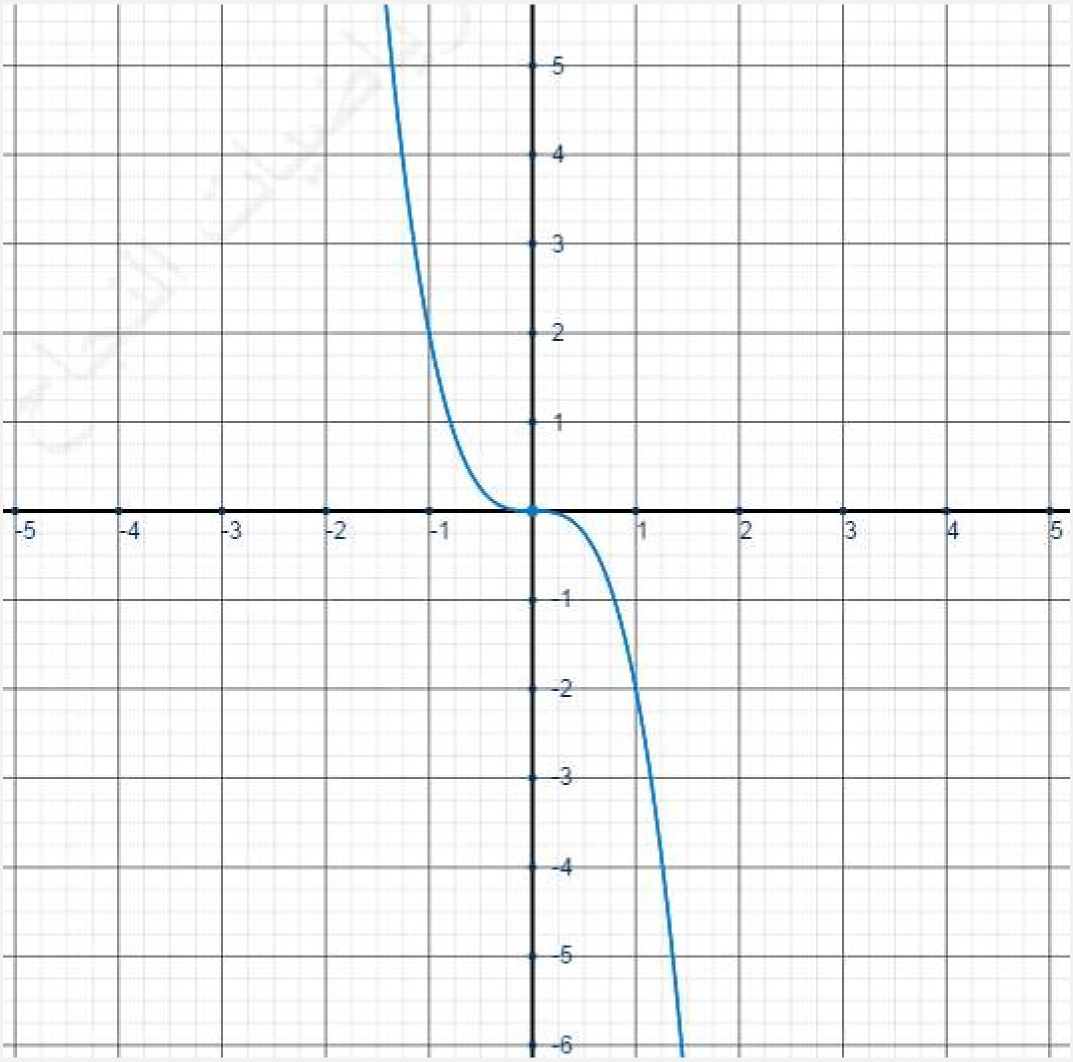
$\boxed{p(x)=\sqrt{x-2}}$

p عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$، إذن :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x)$		0	$\nearrow$



$\boxed{q(x)=-2x^3}$	q عبارة عن دالة على شكل $a\,x^3$ و بما أن $a=-2<0$ ، فإن :	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘ 0 ↘</td></tr></table>



تمرين 3 : أوجد $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1	$Df=IR$ $Dg=\{x\in IR/\ x+4\geq 0\}=\{x\in IR/\ x\geq -4\}=[-4;+\infty[$	$Dh=\{x\in IR/\ x^2+4x+5\geq 0\}$ $\Delta=16-20=-4<0$ ، منه : $Dh=IR$
2	لنبين أن : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$ لدينا : $\forall x\in IR \quad f(x)-(-3)=x^2+4x+1+3=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$ بالتالي : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$	
3	لنبين أن : $\forall x\in IR \quad h(x)\geq 1$ لدينا : $\forall x\in IR \quad h^2(x)-1^2=x^2+4x+5-1=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$ إذن : $\forall x\in IR \quad h^2(x)\geq 1$ و بما أن : $\forall x\in IR \quad h(x)\geq 0$ فإن : $\forall x\in IR \quad h(x)\geq 1$	
4	f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه : $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4}{2}=-2$ ، إذن :	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ -2 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>↘ -3 ↗</td></tr></table>

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$g(x)$		0	↗

g عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$ ، إذن :

5 لدينا : $g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{x^2+4x+1+4}=\sqrt{x^2+4x+5}=h(x)$ $\quad \forall x\in IR$

6

رتابة الدالة h على $]-\infty;-2]$

- لدينا f تناقصية على $]-\infty;-2]$
- لدينا $f(]-\infty;-2])=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$
- لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$

إذن h تناقصية على $]-\infty;-2]$

رتابة الدالة h على $[-2;+\infty[$

- لدينا f تزايدية على $[-2;+\infty[$
- لدينا $f([-2;+\infty[)=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$
- لدينا g تزايدية على $[-3;+\infty[$

إذن h تزايدية على $[-2;+\infty[$

لتحديد رتابة المركب $p\circ q(x)$ على مجال I ، نتبع 3 مراحل:

1) ندرس رتابة $q(x)$ على I 2) نحسب J صورة I بالدالة $q(x)$ 3) ندرس رتابة الدالة $p(x)$ على المجال J

و في الأخير نحدد رتابة المركب انطلاقا من نتائج المرحلتين الأولى و الثالثة مثل قاعدة إشارة جذاء

تمرين 4 : نضع : $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

1

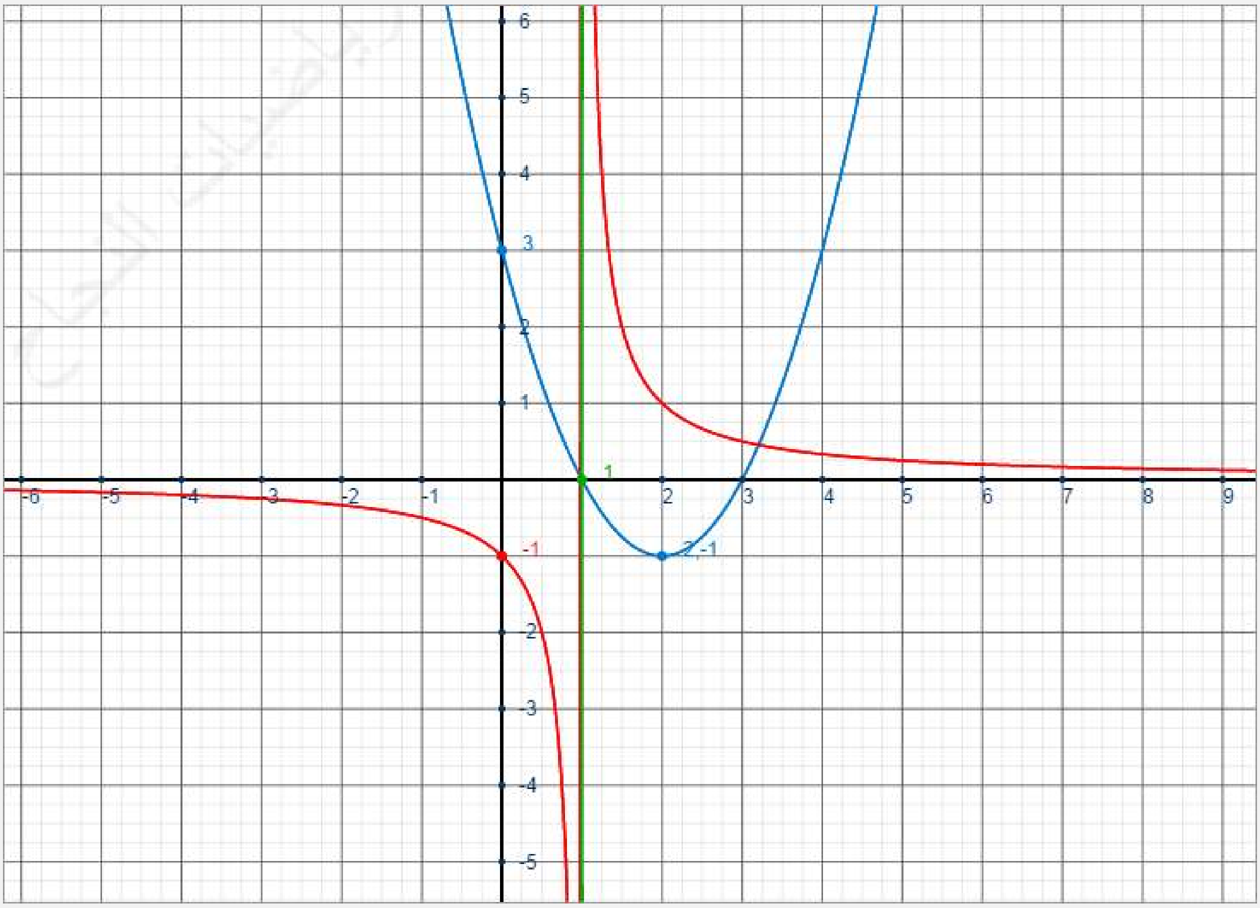
أ) f دالة حدودية من الدرجة الثانية إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم

ب) لنحدد نقطتي تقاطع Cf ومحور الأفاصيل ، أي لنحل المعادلة : $f(x)=0$ أي $x^2-4x+3=0$

لدينا $\Delta=16-12=4>0$ منه : $x=\dfrac{4-2}{2}=1$ ou $x=\dfrac{4+2}{2}=3$ $\Rightarrow x^2-4x+3=0$

بالتالي : Cf يتقاطع مع محور الأفاصيل في النقطتين : $A(1;0)$ و $B(3;0)$

ج) Cf شلجم رأسه $E(1,\ f(1))$ منه :



2 Cg عبارة عن هذلول مركزه $F(1,0)$ و مقارباه هما المستقيمان : $(D_1):\ x=1$ و $(D_2):\ y=0$ (انظر الشكل السابق)

$(E): \quad x^3-5x^2+7x-4=0$

3

أ) بما أن العدد 1 ليس حلا للمعادلة (E) ($1-5+7-4=-1\neq 0$)

فإن : لكل $x\neq 1$:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-4x+3=\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+3)=1$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x-x^2+4x-3-1=0$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \quad x^3-5x^2+7x-4=0$$

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \quad (E)$$

و هذا يبرهن عن التكافؤ المطلوب

ب) بما أن Cf و Cg يتقاطعان في نقطة وحيدة ، فإن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا

في السؤال الأخير غير مطلوب تحديد الحل أو الحلول ، فقط عدد الحلول إن وجدت.

تمرين 5 : $f(x)=x^2-x$ ، $g(x)=\sqrt{|x|}$ ، $(\Delta): \ y=-2x+2$

1

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ،

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\frac{-1}{4}$	↗

لدينا : $Dg=\{x\in IR/ |x|\geq 0\}=IR$

و $\forall x\in IR \ \ g(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=g(x)$

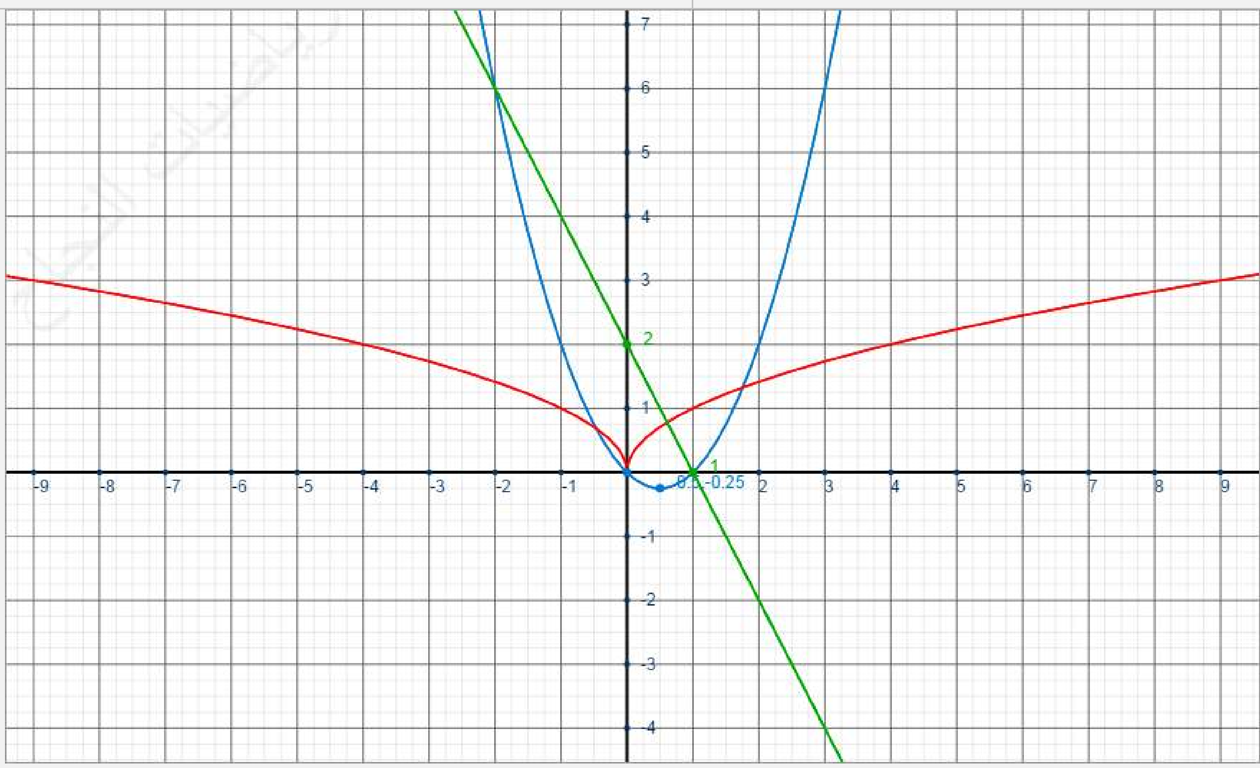
إذن : g دالة زوجية

من جهة أخرى : $\forall x\in IR^+ \quad g(x)=\sqrt{x}$

إذن جدول تغيراتها هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	↘	0	↗

2



3

المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$ تكافئ $g(x)=-2x+2$

مبيانيا نجد أن Cg و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة، إذن المعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا.

4	لنحدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع (C_f) و (Δ) من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=-2x+2$ أي: $x^2-x=-2x+2$ أي: $x^2-x+2x-2=0$ أي $x^2+x-2=0$ ، لدينا: $\Delta=1+8=9$ منه: $x=\frac{-1+3}{2}=1$ أو $x=\frac{-1-3}{2}=-2$ إذن (C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطتين: $E(1, f(1))$ و $F(-2, f(-2))$ أي: $E(1,0)$ و $F(-2, 6)$	
5	مبيانيا نجد أن: ▪ حل المتراجحة $g(x)\leq 3$ هو: $S=[-9;9]$ ▪ حل المتراجحة $g(x)\geq 2$ هو: $S=]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$ ▪ حل المتراجحة $-2x+2<f(x)<2$ هو: $S=(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)\cap[-1,2]=[1;2]$	
6	$g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$	
	$f([-2;1])=\left[\frac{-1}{4};6\right]$ و $f([2;+\infty[)=[2;+\infty[$ و $f(]-\infty;0])=[0;+\infty[$	
7	لدينا: $Dh=IR^+$ و $\forall x\in IR^+\ \ h(x)=x-\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=f(\sqrt{x})=f(g(x))=f\circ g(x)$	
	رتابة الدالة h على $I=\left[0;\frac{1}{4}\right[$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على I ▪ $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و f تناقصية على $\left[0;\frac{1}{2}\right[$ إذن h تناقصية على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$	رتابة الدالة h على $J=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، لدينا: ▪ g تزايدية على J ▪ $g(J)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و f تزايدية على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ إذن h تزايدية على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$
	صعوبة السؤال تكمن في إيجاد التقسيم المناسب للمجال $[0;+\infty[$ حتى يمكن تطبيق خاصية رتابة مركب دالتين	