السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المجموعات و التطبيقات	سلسلة 3

تمرين 1 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f: IR^{+} \to IR \quad x \mapsto x-6\sqrt{x}$$

1) أوجد : $f^{-1}([-9,0])$

2) أوجد : $f([1,4])$

تمرين 2 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f: IR \to IR \quad x \mapsto \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

1) أوجد $f^{-1}(]0;1[)$

2) أوجد $f([1;+\infty[)$

تمرين 3 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f: IR^{*} \to IR \quad x \mapsto x+\frac{1}{x}$$

1) أوجد $f^{-1}([1,2])$

2) بين أن : $\forall x \in \left[\frac{1}{2};2\right] \quad f(1) \leq f(x) \leq f(2)$

3) أوجد $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$

تمرين 4 : ليكن f تطبيقا من مجموعة $E \neq \phi$ نحو مجموعة $F \neq \phi$.

ليكن A و B جزأين من E و C و D جزأين من F .

1) بين أن : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

2) بين أن : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3) بين أن : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4) بين أن : $f(\phi) = \phi$

5) بين أن : $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

6) بين أن : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

7) بين أن : $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

8) بين أن : $f^{-1}(\phi) = \phi$

9) بين أن : $f^{-1}(F) = E$

10) بين بمثال مضاد أن العبارة $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ غير صحيحة.

11) بين بمثال مضاد أن العبارة $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ غير صحيحة

تمرين 5 : ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F و ليكن X جزءا من E و Y جزءا من F .

1) بين أن : $X \subset f^{-1}(f(X))$

2) بين أن : $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

تمرين 6 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :
$$f: IR^{*} \to IR \quad x \mapsto x+\frac{1}{x}$$

بين أن f تقابل من $]1;+\infty[$ نحو $]2;+\infty[$ و حدد تقابله العكسي f^{-1}

تمرين7 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :

$$f: \quad IR \to IR$$
$$x \mapsto x|x|$$

بين أن f تقابل من IR نحو IR وحدد تقابله العكسي f^{-1}

تمرين8 : نعتبر التطبيقين : $f: \quad E \to F$ و $g: \quad F \to G$

1) f تباين $\Leftrightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X)) = X$

2) f شمول $\Leftrightarrow \forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y)) = Y$

3) f تباين $\Rightarrow g \circ f$ تباين

4) g شمول $\Rightarrow g \circ f$ شمول

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المجموعات و التطبيقات حلول مقترحة	سلسلة 3

تمرين 1 : $\begin{array}{l} f: \quad IR^{+} \to IR \\ x \mapsto x-6\sqrt{x} \end{array}$

1

$$f^{-1}([-9,0])=\{x\in IR^{+} / f(x)\in[-9;0]\}=\{x\in IR^{+} / -9\le f(x)\le 0\}=\{x\ge 0/ -9\le x-6\sqrt{x}\le 0\}$$

$$f^{-1}([-9,0])=\{x\ge 0/ 0\le x-6\sqrt{x}+9\le 9\}=\{x\ge 0/ 0\le(\sqrt{x}-3)^{2}\le 9\}=\{x\ge 0/ \ |\sqrt{x}-3|\le 3\}$$

$$f^{-1}([-9,0])=\{x\ge 0/ \ -3\le\sqrt{x}-3\le 3\}=\{x\ge 0/ \ 0\le\sqrt{x}\le 6\}=\{x\ge 0/ \ 0\le x\le 36\}$$

$$f^{-1}([-9,0])=[0;36]$$

2

لدينا: $x\in[1;4] \Rightarrow 1\le x\le 4 \Rightarrow 1\le\sqrt{x}\le 2 \Rightarrow -2\le\sqrt{x}-3\le -1 \Rightarrow 1\le 3-\sqrt{x}\le 2$

$x\in[1;4] \Rightarrow 1\le(3-\sqrt{x})^{2}\le 4 \Rightarrow 1\le x-6\sqrt{x}+9\le 4 \Rightarrow -8\le x-6\sqrt{x}\le -5$

$x\in[1;4] \Rightarrow f(x)\in[-8;-5]$

منه: $f([1;4])\subset[-8;-5]$

عكسيا، ليكن: $y\in[-8;-5]$ ، لنحل في المجال $[1;4]$ المعادلة : $f(x)=y$

$f(x)=y \Leftrightarrow x-6\sqrt{x}=y \Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9=y+9 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^{2}=y+9$

و حيث أن : $y+9\in[1;4]$ فإن :

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x}-3=\sqrt{y+9} \quad ou \quad \sqrt{x}-3=-\sqrt{y+9}$

$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x}=3+\sqrt{y+9} \quad ou \quad \sqrt{x}=3-\sqrt{y+9}$

و حيث أن : $\sqrt{y+9}\in[1;2]$ فإن : $-\sqrt{y+9}\in[-2;-1]$ منه : $3-\sqrt{y+9}\in[1;2]$

منه: $f(x)=y \Leftrightarrow x=(3+\sqrt{y+9})^{2} \quad ou \quad x=(3-\sqrt{y+9})^{2}$

إذن هذه المعادلة تقبل حلا على الأقل $x=(3-\sqrt{y+9})^{2}$ في المجال $[1;4]$، بمعنى أن : $[-8;-5]\subset f([1;4])$

بالتالي : $[-8;-5]=f([1;4])$

تمرين 2 : $\begin{array}{l} f: \quad IR \to IR \\ x \mapsto \dfrac{x^{2}+2}{x^{2}+1} \end{array}$

1

$$f^{-1}(]0;1[)=\{x\in IR/ f(x)\in]0;1[\}=\{x\in IR/ 0< f(x)<1\}=\left\{x\in IR/ 0<\frac{x^{2}+2}{x^{2}+1}<1\right\}$$

$$f^{-1}(]0;1[)=\left\{x\in IR/ 0<\frac{x^{2}+1+1}{x^{2}+1}<1\right\}=\left\{x\in IR/ 0<1+\frac{1}{x^{2}+1}<1\right\}=\left\{x\in IR/ -1<\frac{1}{x^{2}+1}<0\right\}$$

$$f^{-1}(]0;1[)=\{x\in IR/ -x^{2}-1<1<0\}=\emptyset$$

الصورة العكسية لمجموعة قد تكون فارغة كما هو في المثال أعلاه.

2

لدينا: $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow x^{2}\ge 1 \Rightarrow x^{2}+1\ge 2 \Rightarrow 0<\dfrac{1}{x^{2}+1}\le\dfrac{1}{2} \Rightarrow 1<1+\dfrac{1}{x^{2}+1}\le\dfrac{3}{2}$

و $x\in[1;+\infty[\Rightarrow 1<f(x)\le\dfrac{3}{2} \Rightarrow f(x)\in\left]1;\dfrac{3}{2}\right]$

منه: $f([1;+\infty[)\subset\left]1;\dfrac{3}{2}\right]$

عكسيا: ليكن: $y\in\left]1;\dfrac{3}{2}\right]$ ، لنحل في المجال $[1;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x^2+1}=y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=y-1 \Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{y-1}$$

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y-1}-1=\frac{2-y}{y-1} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2-y}{y-1}} \;\; ou \;\; x=-\sqrt{\frac{2-y}{y-1}}$$

وحيث أن: $y\in\left]1;\frac{3}{2}\right]$ فإن: $y-1\in\left]0;\frac{1}{2}\right]$ منه: $\frac{1}{y-1}\in[2;+\infty[$ منه: $\frac{1}{y-1}-1\in[1;+\infty[$

منه: $\sqrt{\frac{1}{y-1}-1}\in[1;+\infty[$ ، إذن هذه المعادلة تقبل حلا $x=\sqrt{\frac{2-y}{y-1}}$ في المجال $[1;+\infty[$

بمعنى أن: $\left]1;\frac{3}{2}\right]\subset f([1;+\infty[)$ ، بالتالي $f([1;+\infty[)=\left]1;\frac{3}{2}\right]$

لاحظ أهمية تغيير تعبير الدالة من $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ إلى $f(x)=1+\frac{1}{x^2+1}$

<u>تمرين 3</u> : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي:

$$f:\; IR^*\to IR,\quad x\mapsto x+\frac{1}{x}$$

1

$$f^{-1}([1,2])=\{x\in IR^*\,/\,f(x)\in[1,2]\}=\{x\in IR^*\,/\,1\le f(x)\le 2\}=\left\{x\in IR^*\,/\,1\le x+\frac{1}{x}\le 2\right\}$$

$$f^{-1}([1,2])=\left\{x\in IR^*\,/\,1\le\frac{x^2+1}{x}\le 2\right\}=\left\{x\in IR^*\,/\,1\le\frac{x^2+1}{x}\;\; et \;\;\frac{x^2+1}{x}\le 2\right\}$$

ولدينا: $1\le\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow x>0$ منه: $\frac{x^2+1}{x}\le 2\Rightarrow x^2+1\le 2x\Rightarrow (x-1)^2\le 0\Rightarrow x=1$

وعكسيا : $f(1)=2\in[1;2]$ ، بالتالي: $f^{-1}([1,2])=\{1\}$

2

لدينا: $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]\Rightarrow f(x)-f(1)=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\ge 0\Rightarrow f(x)\ge f(1)$

من جهة أخرى:

$$x\in\left[\frac{1}{2};2\right]\Rightarrow f(x)-f(2)=x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=\frac{2x^2+2-5x}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}\le 0\Rightarrow f(x)\le f(2)$$

بالتالي: $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)$

3

لدينا حسب السؤال السابق : $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)\subset\left[2;\frac{5}{2}\right]$

عكسيا: ليكن: $y\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ ، لنحل في المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ المعادلة: $f(x)=y$

$f(x)=y\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y\Leftrightarrow x^2-yx+1=0$ ، $\Delta=y^2-4\ge 0$

إذن المعادلة تقبل حلين في IR : $x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ أو $x_2=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

ولدينا : $y\ge 2\Rightarrow x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\ge\frac{y}{2}\ge\frac{2}{2}\ge 1$

و $2\le y\le\frac{5}{2}\Rightarrow 4\le y^2\le\frac{25}{4}\Rightarrow 0\le y^2-4\le\frac{9}{4}\Rightarrow 0\le\sqrt{y^2-4}\le\frac{3}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}\le 2$

منه: $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ بالتالي: $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)=\left[2;\frac{5}{2}\right]$

تمرين 4 :

1

لنبين أن : $A\subset B \;\Rightarrow\; f(A)\subset f(B)$

نفترض أن $A\subset B$ ولنبين أن: $f(A)\subset f(B)$

لدينا: $y\in f(A)\Rightarrow \exists x\in A \;/\; y=f(x)\Rightarrow \exists x\in B \;/\; y=f(x)\Rightarrow y\in f(B)$ ، بالتالي : $f(A)\subset f(B)$

2

لنبين أن : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

لدينا : $A\subset A\cup B$ إذن حسب السؤال السابق $f(A)\subset f(A\cup B)$

و أيضا : $B\subset A\cup B \;\Rightarrow\; f(B)\subset f(A\cup B)$

لدينا إذن :
$$\begin{cases} f(A)\subset f(A\cup B) \\ f(B)\subset f(A\cup B) \end{cases} \Rightarrow\; f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$$

من جهة أخرى :
$$y\in f(A\cup B)\Rightarrow \exists x\in A\cup B \;/\; y=f(x)\Rightarrow \exists x\in A \text{ ou } x\in B \;/\; y=f(x)$$
$$\Rightarrow y\in f(A) \text{ ou } y\in f(B) \;\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)$$

منه : $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$ ، بالتالي : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

3

لنبين أن: $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

و أيضا :
$$\begin{cases} A\cap B\subset A \\ A\cap B\subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A\cap B)\subset f(A) \\ f(A\cap B)\subset f(B) \end{cases} \Rightarrow f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$$

4

لنبين أن : $f(¤)=¤$ ، سنستعمل برهانا بالخلف ، نفترض أن: $f(¤)\neq ¤$ إذن $f(¤)$ تحتوي على الأقل على عنصر y ، وحسب تعريف صورة مجموعة بتطبيق فإنه يوجد عدد $x\in ¤$ بحيث $y=f(x)$ ، وهذا غير ممكن لأن ¤ لا تتضمن أي عنصر.

5

لنبين أن: $C\subset D \;\Rightarrow\; f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$ ، نفترض أن $C\subset D$ و لنبين أن: $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$

لدينا: $x\in f^{-1}(C)\Rightarrow f(x)\in C\Rightarrow f(x)\in D\Rightarrow x\in f^{-1}(C)$ ، بالتالي: $f^{-1}(C)\subset f^{-1}(D)$

6

لنبين أن: $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

لدينا :
$$\begin{cases} C\subset C\cup D \\ D\subset C\cup D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(C)\subset f^{-1}(C\cup D) \\ f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cup D) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)\subset f^{-1}(C\cup D)$$

من جهة أخرى :
$$x\in f^{-1}(C\cup D)\Rightarrow f(x)\in C\cup D\Rightarrow f(x)\in C \text{ ou } f(x)\in D$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}(C) \text{ ou } x\in f^{-1}(D) \;\Rightarrow x\in f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$$

منه : $f^{-1}(C\cup D)\subset f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$ ، بالتالي : $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$

7

لنبين أن : $f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$

لدينا:
$$\begin{cases} C\cap D\subset C \\ C\cap D\subset D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C) \\ f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(D) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(C\cap D)\subset f^{-1}(C)\cap f^{-1}(D)$$

8

لنبين أن $f^{-1}(¤)=¤$ ، نفترض أن: $f^{-1}(¤)\neq ¤$ إذن: $f^{-1}(¤)$ تتضمن عنصرا x على الأقل، إذن $f(x)\in ¤$ و هذا غير ممكن ، إذن: $f^{-1}(¤)=¤$

9

لنبين أن: $f^{-1}(F)=E$

لدينا : $x\in E \;\Rightarrow\; f(x)\in F\Rightarrow x\in f^{-1}(F)$ ، منه: $E\subset f^{-1}(F)$

ولدينا: $x\in f^{-1}(F)\Rightarrow f(x)\in F \,/\, x\in E\Rightarrow x\in E$ منه: $f^{-1}(F)\subset E$ ، بالتالي : $f^{-1}(F)=E$

10

العبارة $f(A)\subset f(B) \;\Rightarrow\; A\subset B$ ليست صحيحة دائما

مثلا نأخذ: $E=\{1,2,3,4\}$ و $F=\{0\}$ بحيث جميع عناصر E لها نفس الصورة 0

و نأخذ: $A=\{1;2\}$ و $B=\{3;4\}$

وهكذا يكون لدينا: $f(A)=\{0\}$ وأيضا $f(B)=\{0\}$ منه: $f(A)=f(B)$ لكن: $\{1;2\}\not\subset\{3;4\}$

11 العبارة $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ ليست صحيحة دائما

نفس المثال السابق: $f(A)\cap f(B)=\{0\}\cap\{0\}=\{0\}$ و $f(A\cap B)=f(¤)=¤$

لكن العبارة: $\{0\}\subset ¤$ غير صحيحة

1) **<u>تمرين 5</u>** : ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F وليكن X جزءا من E و Y جزءا من F .

1 لنبين أن: $X\subset f^{-1}(f(X))$

لدينا : $x\in X\Rightarrow f(x)\in f(X)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(X))$ ، بالتالي : $X\subset f^{-1}(f(X))$

2 لدينا : $y\in f\left(f^{-1}(Y)\right)\Rightarrow \exists x\in f^{-1}(Y)/\,y=f(x)\Rightarrow f(x)\in Y/\,y=f(x)\Rightarrow y\in Y$

بالتالي: $f\left(f^{-1}(Y)\right)\subset Y$

تبدو مثل هذه العبارات صعبة البرهان، لكنها على العكس تماما، فقط يجب إدراك مفهوم صورة مجموعة بتطبيق و الصورة العكسية لمجموعة بتطبيق إدراكا جيدا

<u>تمرين 6</u> :

$$f:\ IR^{*}\to IR$$
$$x\mapsto x+\frac{1}{x}$$

- لنبين أولا أن f تباين على $[1;+\infty[$

لدينا لكل $(x;y)\in[1;+\infty[^{2}$:

$$f(x)=f(y)\Rightarrow x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}\Rightarrow x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0\Rightarrow(x-y)-\frac{(x-y)}{xy}=0$$

$$f(x)=f(y)\Rightarrow(x-y)\left(\frac{xy-1}{xy}\right)=0\Rightarrow x=y\ ou\ xy=1$$

وبما أن: $\begin{cases}xy=1\\x\geq1\\y\geq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{y}\\x\geq1\\\dfrac{1}{y}\leq1\end{cases}\Rightarrow(1\leq x\leq1)\Rightarrow(x=1)\Rightarrow(y=1)\Rightarrow(x=y=1)$ فإن: $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$

- لنبين أن f شمول على $[2;+\infty[$

ليكن $y\in[2;+\infty[$ ولنبين أن المعادلة: $f(x)=y$ تقبل على الأقل حلا في $[1;+\infty[$

لدينا: $\begin{cases}f(x)=y\\x\in[1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=y\\x\geq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^{2}-yx+1=0\\x\geq1\end{cases}$ ولدينا : $\Delta=y^{2}-4\geq0$

منه: $\begin{cases}f(x)=y\\x\in[1;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}=y\\x\geq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{y+\sqrt{y^{2}-4}}{2}\ ou\ x=\dfrac{y-\sqrt{y^{2}-4}}{2}\\x\geq1\end{cases}$

ولدينا : $\dfrac{y+\sqrt{y^{2}-4}}{2}\geq\dfrac{y}{2}\geq1$ ، إذن أن المعادلة: $f(x)=y$ تقبل على الأقل الحل $\dfrac{y+\sqrt{y^{2}-4}}{2}$ في $[1;+\infty[$

إذن f شمولية على $[2;+\infty[$، بالتالي f تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $[2;+\infty[$ و تقابله العكسي f^{-1} معرف كما يلي :

$$f^{-1}\ [2;+\infty[\to[1;+\infty[$$
$$x\mapsto\frac{x+\sqrt{x^{2}-4}}{2}$$

للبرهان على التقابل يمكن البرهان أن للمعادلة $f(x)=y$ حلا وحيدا في مجموعة الانطلاق، لكن هذا الأمر يكون صعبا كما هو الشأن في هذا التمرين، لذلك تكون أفضل وسيلة هي البرهان عن التباين ثم الشمول.

تمرين 7 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي : $\begin{array}{l} f: \quad IR \to IR \\ x \mapsto x|x| \end{array}$

- لنبين أن f تقابل من IR نحو IR

ليكن $y \in IR$ ولنبين أن المعادلة : $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا في IR

لدينا : $f(x) = y \Leftrightarrow x|x| = y$

إذا كان : $y \geq 0$ فإن : $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x|x| = y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

و إذا كان : $y < 0$ فإن : $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x|x| = y \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 = y \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}$

في كل الحالات المعادلة : $f(x) = y$ تقبل على الأقل حلا في IR

بالتالي: f تقابل من IR نحو IR وتقابله العكسي f^{-1} معرف كما يلي : $\begin{array}{l} f^{-1} \; IR \to IR \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & si \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & si \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$

هذا مثال تطبيق يكون تقابله العكسي معرف على مجالات

البرهان على التقابل في هذا التمرين تم بالبرهان على وجود و وحدانية حلول المعادلة $f(x) = y$ دون الحاجة للتباين، لكن يجب الانتباه أن ذلك يتطلب عبارة متكافئة و ليس استلزاما.

تمرين 8 : نعتبر التطبيقين : $f: \quad E \to F$ و $g: \quad F \to G$

1

- لنبين أن : f تباين $\Rightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X)) = X$

ليكن $(x;y) \in E^2$ بحيث: $f(x) = f(y)$

لدينا : $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ و $f(\{y\}) = \{f(y)\}$

وبما أن $f(x) = f(y)$ فإن : $f(\{y\}) = f(\{x\})$ منه : $f^{-1}(f(\{y\})) = f^{-1}(f(\{x\}))$

وحسب المعطيات و بأخذ $X = \{x\}$ ثم $X = \{y\}$

فإننا نستنتج أن : $\{x\} = \{y\}$ منه: $x = y$

- لنبين أن : $\forall X \in P(E): f^{-1}(f(X)) = X \Rightarrow f$ تباين

ليكن $X \in P(E)$

لدينا من جهة: $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$ منه : $X \subset f^{-1}(f(X))$

و من جهة أخرى : $x \in f^{-1}(f(X)) \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(a) \\ a \in X \end{cases}$

وباستعمال تباين الدالة نستنتج أن : $x = a$ ومنه: $x \in X$ ، إذن $f^{-1}(f(X)) \subset X$

بالتالي: $f^{-1}(f(X)) = X$

خلاصة: f تباين $\Leftrightarrow \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X)) = X$

2

- لنبين أن : f شمول $\Rightarrow \forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y)) = Y$

ليكن $y \in F$ ، منه $\{y\} \subset F$ أي: $\{y\} \in P(F)$ ، إذن حسب المعطيات: $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$

إذن $\exists a \in f^{-1}(\{y\}) \;/\; f(a) = y$ ، وبما أن $f^{-1}(\{y\}) \subset E$ فإن : $\exists a \in E \;/\; f(a) = y$ ، إذن : f شمول

- لنبين أن $\forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y)) = Y \Rightarrow f$ شمول

ليكن $Y \in P(F)$ ، لدينا من جهة :

	$y \in f\left(f^{-1}(Y)\right) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(Y) / y = f(x) \Rightarrow f(x) \in Y / y = f(x) \Rightarrow y \in Y$ منه : $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y$ ، و من جهة أخرى و باستعمال شمول الدالة : $y \in Y \Rightarrow \exists x \in E \ / \ y = f(x) \Rightarrow f(x) \in Y \Rightarrow x \in f^{-1}(Y) \Rightarrow f(x) \in f\left(f^{-1}(Y)\right) \Rightarrow y \in f\left(f^{-1}(Y)\right)$ بالتالي: $Y \subset f\left(f^{-1}(Y)\right)$ خلاصة: f شمول $\Leftrightarrow \forall Y \in P(F) : f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$	
3	لنبين أن : f تباين $\Rightarrow$ $g \circ f$ تباين ليكن $(x;y) \in E^2$ بحيث: $f(x) = f(y)$ لدينا و باستعمال تباين $g \circ f$: $f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$ بالتالي: f تباين	
4	لنبين أن : g شمول $\Rightarrow$ $g \circ f$ شمول ليكن $y \in G$ ، باستعمال شمول $g \circ f$ نستنتج أن : $\exists x \in E \ / \ y = g \circ f(x) = g(f(x))$ و بوضع $b = f(x) \in F$ فإننا نستنتج أن: $\exists b \in F \ / \ y = g(b)$ وبالتالي: g شمول	