

## .01

لتكن  $u_n$  و  $v_n$  متتاليتين معرفتين بما يلي : لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5)$  و  $v_n = \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$  .

1. أحسب  $u_0$  و  $u_1$  و  $v_0$  و  $v_1$  .

2. نضع :  $a_n = u_n + v_n$  .

أ- بين أن المتتالية  $a_n$  هندسية و أساسها 2 . ب- أحسب المجموع :  $S_1 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$  .

3. نضع :  $b_n = u_n - v_n$  .

أ- بين أن المتتالية  $b_n$  حسابية و أساسها 2 . أحسب المجموع :  $S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \dots + b_n$  .

4. استنتج المجموع :  $S_3 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و  $S_4 = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  .

## .02

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة كما يلي :  $u_0 = 1$  و  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{2 \cdot u_n}{3 + \sqrt{u_n}}$  .

1. أ- أحسب :  $u_1$  و  $u_2$  . ب- بين أن :  $u_n > 0 : \forall n \geq 0$  .

2. بين أن :  $u_n$  تناقصية .

3. أ- بين أن :  $u_n \leq \frac{2}{3} u_{n+1} : \forall n \geq 0$  . ب- استنتج أن :  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n : \forall n \geq 0$  .

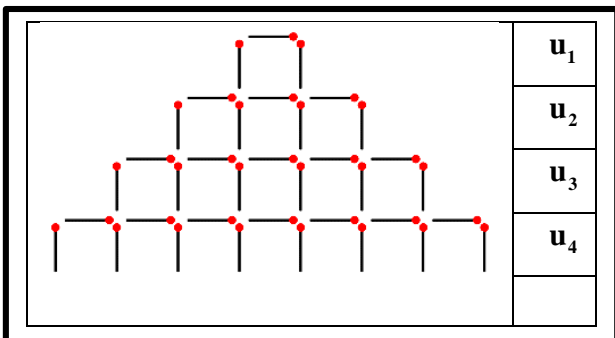
## .03

نعتبر المتتالية العددية  $u_n$  المعرفة ب :  $u_0 = 3$  و  $u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  .

1. أ- أحسب  $u_1$  و  $u_2$  . ب- بين بالترجع :  $0 \leq u_n \leq 3 : \forall n \in \mathbb{N}$  .

2. نعتبر المتتالية  $v_n$  المعرفة ب : لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$  .

أ- أحسب  $v_0$  و  $v_1$  . ب- بين أن المتتالية  $v_n$  هندسية و أساسها  $\frac{1}{2}$  . ج- أكتب  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  . د- أحسب  $u_{10}$  .



## .04

نستعمل عود الثقاب للإنشاء هرم كما يوضحه الشكل .

نرمز  $u_n$  عدد عود الثقاب الضرورية للإنشاء الطبقة رقم  $n$  .

1. ما هي طبيعة المتتاليات  $u_n$  محددًا عناصرها المميزة .

2. ما هو عدد عود الثقاب الضرورية للإنشاء الهرم المتكون من 100 طباق ؟



## 01. التمرين الاول :-

1. أحسب  $u_0$  و  $u_1$  و  $v_0$  و  $v_1$ .

لدينا :  $u_0 = \frac{1}{4}(2^0 + 4 \times 0 - 5) = -1$  و  $u_1 = \frac{1}{4}(2^1 + 4 \times 1 - 5) = \frac{1}{4}$

$v_0 = \frac{1}{4}(2^0 - 4 \times 0 + 5) = \frac{3}{2}$  و  $v_1 = \frac{1}{4}(2^1 - 4 \times 1 + 5) = \frac{3}{4}$

2. أ- نبين أن المتتالية  $a_n$  هندسية و أساسها 2 :  
لدينا :

$$a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$$

$$= \frac{1}{4}(2^{n+1} + 4(n+1) - 5) + \frac{1}{4}(2^n - 4(n+1) + 5)$$

$$= \frac{1}{4}2 \times 2^{n+1}$$

$$= 2^n$$

إذن :  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$

خلاصة : المتتالية  $a_n$  هندسية و أساسها 2 :

ب- نحسب المجموع  $S_1 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

بما أن  $a_n$  هندسية و أساسها 2  
لدينا :

$$S_1 = a_0 \times \frac{1 - 2^{n-0+1}}{1 - 2}$$

$$= (u_0 + v_0) \times (-1 + 2^{n-0+1})$$

$$= \frac{1}{2} \times (-1 + 2^{n+1})$$

$$= 2^n - \frac{1}{2}$$

3. أ- نبين أن المتتالية  $b_n$  حسابية و نحدد عناصرها المميزة :

$$b_{n+1} - b_n = (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n)$$

$$= \frac{1}{4}(8n - 2 - 8n + 16) = 2$$

خلاصة :  $b_n$  متتالية حسابية و نحدد عناصرها المميزة :



التاريخ: 23:03 2015-01-26

صفحة

ب- نحسب المجموع  $S_2 = \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

لدينا :

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{i=n} b_i = b_0 + b_1 + \dots + b_n \\ &= \frac{b_0 + b_n}{2} \times (n - 0 + 1) \\ &= \left( -\frac{5}{2} + 2n - \frac{5}{2} \right) \frac{n+1}{2} \\ &= \left( n - \frac{5}{2} \right) (n+1) \end{aligned}$$

4. نستنتج المجموعين :  $S_3 = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  و  $S_4 = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

لدينا :  $a_n + b_n = 2u_n$  ومنه  $u_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{a_0 + b_0}{2} + \frac{a_1 + b_1}{2} + \dots + \frac{a_n + b_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \frac{1}{2} \times (S_1 + S_2) \\ &= 2^{n-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( n - \frac{5}{2} \right) (n+1) \\ &= 2^{n-1} + \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{4} n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

لدينا :  $a_n - b_n = 2v_n$  ومنه  $v_n = \frac{a_n - b_n}{2}$

إذن :

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{a_0 - b_0}{2} + \frac{a_1 - b_1}{2} + \dots + \frac{a_n - b_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) - (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \frac{1}{2} \times (S_1 - S_2) \\ &= 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( n - \frac{5}{2} \right) (n+1) = 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{4} n + 1 \end{aligned}$$

خلاصة :  $S_4 = 2^{n-1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} n^2 + \frac{3}{4} n + 1$  و  $S_3 = 2^{n-1} + \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{4} n - \frac{3}{2}$



## 02. التمرين الثاني:-

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

$$\text{لدينا : } u_1 = \frac{2u_0}{3 + \sqrt{u_0}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ و } u_2 = \frac{2u_1}{3 + \sqrt{u_1}} = \frac{1}{3 + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{6 - \sqrt{2}}{17}$$

2. نبين أن :  $\forall n \geq 0 ; u_n > 0$

نستدل على ذلك بالترجع :

نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$  .

لدينا :  $u_0 = 1 > 0$  ومنه العلاقة صحيحة ل  $n = 0$  .

نفترض أن أن العلاقة صحيحة إلى  $n$  أي  $u_n > 0$  .

نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n + 1$   
لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2u_n > 0 \\ 3 + \sqrt{u_n} > 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

ومنه العلاقة صحيحة ل  $n + 1$

خلاصة :  $\forall n \geq 0 ; u_n > 0$

3. نبين أن :  $u_n$  تناقصية :

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} - u_n$$

$$= -\frac{u_n(1 + \sqrt{u_n})}{3 + \sqrt{u_n}} < 0 \quad (\text{لأن } u_n > 0)$$

ومنه :  $u_{n+1} < u_n$

خلاصة :  $u_n$  تناقصية .

4. أ - نبين أن :  $u_{n+1} < \frac{2}{3}u_n$

لدينا :

التاريخ: 23:03 2015-01-26

$$\begin{aligned} 3 + \sqrt{u_n} > 3 &\Rightarrow \frac{1}{3 + \sqrt{u_n}} \leq \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow \frac{2u_n}{3 + \sqrt{u_n}} \leq \frac{2u_n}{3} \\ &\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{3} \end{aligned}$$

خلاصة :  $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

ب - نستنتج أن  $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا :  $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

من أجل  $n=0$  نحصل على  $u_1 \leq \frac{2}{3}u_0$

من أجل  $n=1$  نحصل على  $u_2 \leq \frac{2}{3}u_1$

من أجل  $n=2$  نحصل على  $u_3 \leq \frac{2}{3}u_2$

.....  
/.....

من أجل  $n-2$  نحصل على  $u_{n-1} \leq \frac{2}{3}u_{n-2}$

من أجل  $n-1$  نحصل على  $u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$

المتفاوتات حدودها موجبة جدًاؤها طرف بطرف نحصل بعد الاختزال على :

$$(u_0 = 1 \text{ : ونعلم أن : } ) u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times u_0$$

إذن :  $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$  ولدينا  $u_n > 0$  حسب ما سبق ومنه :  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

خلاصة :  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

## التمرين 3: 03

1. أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

لدينا :  $u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  و  $u_2 = \frac{2}{1+u_1} = \frac{4}{3}$

خلاصة :  $u_1 = \frac{1}{2}$  و  $u_2 = \frac{4}{3}$

2. نبين أن :  $\forall n \geq 0 ; 0 \leq u_n \leq 3$

نستدل على ذلك بالترجع :

نتحقق أن العلاقة صحيحة ل  $n = 0$  .

لدينا :  $u_0 = 3$  و منه  $0 \leq u_0 \leq 3$  ومنه العلاقة صحيحة ل  $n = 0$  .

نفترض أن أن العلاقة صحيحة إلى  $n$  أي  $0 \leq u_n \leq 3$  .

نبين أن العلاقة صحيحة ل  $n+1$

لدينا :

$$0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 1 \leq u_n + 1 \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{1+u_n} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

ومنه العلاقة صحيحة ل  $n+1$  .

خلاصة :  $\forall n \geq 0 ; 0 \leq u_n \leq 3$

3. أ- أحسب  $v_0$  و  $v_1$  .

لدينا :  $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$  و  $v_1 = \frac{u_1 - 1}{u_1 + 2} = -\frac{1}{5}$

ب- نبين أن المتتالية  $v_n$  هندسية و أساسها  $q = -\frac{1}{2}$  :

لدينا :

التاريخ: 23:03 2015-01-26



$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{1+u_n}-1}{\frac{2}{1+u_n}+2} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = \frac{1-u_n}{4+2u_n} = -\frac{1}{2} \times \frac{u_n-1}{4+2u_n} = -\frac{1}{2} \times v_n$$

إذن :  $v_{n+1} = -\frac{1}{2} \times v_n$

خلاصة : المتتالية  $a_n$  هندسية و أساسها  $q = -\frac{1}{2}$  :

ج - كتابة  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  .

• نكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  .

بما أن  $a_n$  هندسية و أساسها  $q = -\frac{1}{2}$  :

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} ; (n_0 = 0)$$

$$= v_0 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{خلاصة :}$$

• نكتب  $u_n$  بدلالة  $n$  .

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n-1$$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -1 - 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-1-2v_n}{v_n-1} = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$$

$$(v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \text{ : لأن } ) u_n = \frac{1+2 \times \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \text{ : و منه : } u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n} \text{ و بالتالي :}$$

ه - حساب  $u_{10}$  :

$$u_{10} = \frac{2 \times \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} + 1}{1 - \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1 + \frac{2}{2^9 \times 5}}{1 - \frac{1}{2^9 \times 5}} = \frac{2 + 2^9 \times 5}{2^9 \times 5 - 1} = \frac{2562}{2559} \approx 1,0011 \text{ : لدينا}$$

## 04. التمرين 4:

1. طبيعة المتتاليات  $u_n$  محددًا عناصرها المميزة .

$$u_4 = 15 \text{ و } u_3 = 11 \text{ و } u_2 = 7 \text{ و } u_1 = 3$$

ومنه : نستنتج بأن المتتالية  $u_n$  حسابية أساسها  $r = 4$  وحدها الأول هو  $u_1 = 3$  .

2. عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء الهرم المتكون من 100 طابق :

بما أن :  $u_n$  حسابية أساسها  $r = 4$  وحدها الأول هو  $u_1 = 3$  .

إذن :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= \frac{u_1 + u_n}{2} \times (n - 1 + 1) \\ &= \frac{3 + (3 + (n - 1) \times 4)}{2} (n + 1) ; [u_n = u_1 + (n - 1) \times r] \\ &= 3 + 2 \times (n - 1) \end{aligned}$$

ومنه : عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو :

$$S_{100} = \frac{3 + (3 + 4 \times (100 - 1))}{2} \times (100 - 1 + 1) = 201 \times 100 = 20100$$

خلاصة : عدد عود الثقاب الضرورية لإنشاء هرم متكون من 100 طوابق هو : 20100 عود من عود الثقاب.

تصحيح السلسلة رقم 7 الدورة الاولى  
من طرف التلميذ المهدي قصير