

## المتتاليات العددية

### تمرين 1

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$$

♦ احسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$

### تمرين 2

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

♦ احسب  $u_3$

### تمرين 3

نعتبر المتتاليتين العدديتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

$$v_n = 3 \times 2^n + 1 \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

-1 احسب الحدود الأربعة الأولى لكل من  $(u_n)$  و  $(v_n)$  ، ماذا تلاحظ ؟

-2 برهن بالترجع أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times 2^n + 1$

### تمرين 4

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$$

-1 احسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $u_3$

-2 بين بالترجع أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$

-3 بين أن  $(u_n)$  تزايدية

### تمرين 5

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{4}{u_n} \right) \end{cases}$$

-1 بين بالترجع أن  $(u_n)$  مصغورة بـ 2

-2 بين ان  $(u_n)$  تناقصية

### تمرين 6

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

-1

أ- تحقق أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}$

ب- بين بالترجع أن  $(u_n)$  مصغورة بـ 3

-2

أ- تحقق أن :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}$

ب- استنتج ان  $(u_n)$  تزايدية

### تمرين 7

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$$

♦ بين بالترجع أن  $(u_n)$  مكبورة بـ 4

### تمرين 8

♦ ادرس رتبة المتتاليات التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{n+1}{3^n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n}{n+1}$$

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = n^3 - n$$

**تمرين 9**

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 2$  وأساسها  $r = 3$

احسب  $u_7$  و  $u_{11}$  ◇

احسب :  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99}$  ◇

**تمرين 10**

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = -1$

احسب  $r$  أساس المتتالية علما أن  $u_{10} = 59$  ◇

احسب :  $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{22}$  ◇

**تمرين 11**

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $r$

احسب  $r$  و  $u_0$  علما أن :  $u_3 = 12$  و  $u_{17} = 82$  ◇

احسب :  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$  ◇

**تمرين 12**

لتكن  $(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0 = 3$  وأساسها  $r = 2$

احسب  $u_3$  و  $u_6$  ◇

احسب :  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_5$  ◇

**تمرين 13**

لتكن  $(u_n)$  هندسية أساسها  $r = \frac{1}{2}$

احسب  $u_0$  علما أن  $u_3 = \frac{5}{8}$  ◇

احسب :  $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$  ◇

**تمرين 14**

نعتبر المتتاليتين العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي : 
$$v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \end{cases}$$

بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية محددا أساسها و حدها الأول ◇

احسب  $v_n$  بدلالة  $n$  ◇

استنتج حساب  $u_n$  بدلالة  $n$  ◇

احسب مجموع الحدود السبعة الأولى للمتتالية  $(v_n)$  ◇

**تمرين 15**

نعتبر المتتاليتين العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي : 
$$v_n = u_n - \frac{5}{3} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \quad n \geq 0 \end{cases}$$

بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول ◇

احسب  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  ◇

احسب :  $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  بدلالة  $n$  ◇

**تمرين 16**

نعتبر المتتاليتين العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي : 
$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

احسب  $u_2$  و  $u_3$  و  $v_0$  و  $v_1$  ◇

بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ثم أوجد حدها العام ◇

بين أن :  $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = u_n - u_0$  ◇

استنتج الحد العام للمتتالية  $(u_n)$  ◇

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

**تمرين 17**  
نعتبر المتتاليتين العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

1- احسب  $u_1$  و  $u_2$  و  $v_1$  و  $v_2$

2- نعتبر المتتالية :  $w_n = u_n - v_n$

أ- بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية محددًا أساسها

ب- أوجد الحد العام للمتتالية  $(w_n)$

3- نعتبر المتتالية :  $t_n = 3u_n + 2v_n$

أ- بين أن  $(t_n)$  متتالية ثابتة .

ب- أوجد الحد العام للمتتالية  $(t_n)$

4- استنتج مما سبق تعبير كل من  $(u_n)$  و  $(v_n)$  بدلالة  $n$  .

$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$$

**تمرين 18**  
نعتبر المتتاليتين العددية  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

نعتبر المتتاليتين :  $w_n = v_n - u_n$  و  $t_n = 3u_n + 10v_n$

1- بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية ثم أوجد حدها العام .

2- بين أن  $(t_n)$  متتالية ثابتة ثم أوجد حدها العام .

3- استنتج مما سبق تعبير كل من  $(u_n)$  و  $(v_n)$  بدلالة  $n$  .

**تمرين 19**

لتكن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  و أساسها  $r$

1- احسب  $r$  و  $u_0$  علما أن :  $u_3 + u_4 + u_5 = -9$  و  $u_6 = -7$

2- احسب :  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{100}$

**تمرين 20**

لتكن  $(v_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $v_0 = 3$  و أساسها  $r = 2$

1- احسب :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$  بدلالة  $n$

2- نعتبر المتتالية :  $w_n = v_n^2$

أ- بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية .

ب- استنتج حساب المجموع  $T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2$  بدلالة  $n$  .

**تمرين 21**

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3n+1} \end{cases}$$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

1- احسب  $u_1$  و  $u_2$

2- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$

3- ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

4-

أ- بين أن :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}$

ب- استنتج أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq 8 \left(\frac{1}{4}\right)^n$

**تمرين 22**

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} \end{cases}$$

-1 بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < \frac{1}{2}$

-2 أدرس رتبة  $(u_n)$

-3 بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$

## المتتاليات العددية

### حلول مقترحة

#### تمرين 1

$u_3 = \frac{2}{5}u_2 + 1$	$u_2 = \frac{2}{5}u_1 + 1$	$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + 1$	$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \end{cases}$
$u_3 = \frac{86}{125} + 1 = \frac{211}{125}$	$u_2 = \frac{18}{25} + 1 = \frac{43}{25}$	$u_1 = \frac{4}{5} + 1 = \frac{9}{5}$	

#### تمرين 2

$u_3 = 1 + \frac{1}{u_2}$	$u_2 = 1 + \frac{1}{u_1}$	$u_1 = 1 + \frac{1}{u_0}$	$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$
$u_3 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$	$u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$u_1 = 1 + 1 = 2$	

⚡ : لاحظ أن حساب  $u_3$  يرجع إلى حساب  $u_2$  و  $u_1$  و  $u_0$  بالضرورة ، و لذلك تسمى مثل هذه المتتاليات بالترجعية.

#### تمرين 3

$u_3 = 2u_2 - 1$	$u_2 = 2u_1 - 1$	$u_1 = 2u_0 - 1$	$u_0 = 4$	1
$u_3 = 26 - 1 = 25$	$u_2 = 14 - 1 = 13$	$u_1 = 8 - 1 = 7$		
$v_3 = 3 \times 2^3 + 1$	$v_2 = 3 \times 2^2 + 1$	$v_1 = 3 \times 2^1 + 1$	$v_0 = 3 \times 2^0 + 1$	2
$v_3 = 24 + 1 = 25$	$v_2 = 12 + 1 = 13$	$v_0 = 6 + 1 = 7$	$v_0 = 3 + 1 = 4$	

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3 \times 2^n + 1$  : لنبين بالترجع أن

بالنسبة لـ  $n = 0$  ، لدينا :  $u_0 = 4$  و  $3 \times 2^0 + 1 = 3 + 1 = 4$  منه :  $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$

نفترض أن :  $u_n = 3 \times 2^n + 1$  و نبين أن :  $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

لدينا :  $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$

⚡ : لاحظ أن نتيجة السؤال الأخير تعني أننا نستطيع إيجاد تعبير مباشر لبعض المتتاليات الترجعية ، مما يسمح بحساب حدودها دون ضرورة حساب الحدود التي تسبقها .

#### تمرين 4

$u_3 = 3u_2 - 4$	$u_2 = 3u_1 - 4$	$u_1 = 3u_0 - 4$	$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4 \end{cases}$	1
$u_3 = 87 - 4 = 83$	$u_2 = 33 - 4 = 29$	$u_1 = 15 - 4 = 11$		

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 2$  لنبين بالترجع أن

بالنسبة لـ  $n = 0$  ، لدينا :  $u_0 = 5$  منه :  $u_0 > 2$

نفترض أن :  $u_n > 2$  و نبين أن :  $u_{n+1} > 2$

لدينا :  $u_n > 2 \Rightarrow 3u_n > 6 \Rightarrow 3u_n - 4 > 6 - 4 \Rightarrow u_{n+1} > 2$

لدينا :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4 = 2(u_n - 2) > 0$  إذن  $(u_n)$  تزايدية

⚡ : لاحظ أننا استعملنا السؤال الثاني لدراسة رتبة المتتالية و هذا الأمر يكون ضروريا في أغلب المتتاليات.

تمرين 5

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{4}{u_n} \right) \end{cases}$	1
<p>لنبين بالترجع أن <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 2</math>  بالنسبة لـ <math>n=0</math> ، لدينا : <math>u_0 = 3</math> : منه : <math>u_0 \geq 2</math>  نفترض أن : <math>u_n \geq 2</math> و نبين أن : <math>u_{n+1} \geq 2</math></p> <p>لدينا : <math>u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{4}{u_n} \right) - u_n = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + 4 - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{4 - u_n^2}{2u_n} = \frac{(2 + u_n)(2 - u_n)}{2u_n}</math></p> <p>و بما أن <math>u_n \geq 2</math> (حسب الافتراض) فإن <math>2 - u_n \leq 0</math> و <math>2 + u_n &gt; 0</math> و <math>2u_n &gt; 0</math> : ومنه : <math>u_{n+1} - u_n \leq 0</math>  و بالتالي : <math>(u_n)</math> تناقصية</p>	2
<p>⬠ : لاحظ أننا استعملنا طريقة مغايرة للطريقة السابقة ، لأن التأطير المباشر لا يؤدي للنتيجة المطلوبة.</p>	

تمرين 6

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$	
<p>لدينا <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - 3 = \frac{2u_n^2 - 3 - 3(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - 3u_n - 6}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3u_n - 9}{u_n + 2}</math></p> <p>و بما أن : <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n - 3)(2u_n + 3) = 2u_n^2 + 3u_n - 6u_n - 9 = 2u_n^2 - 3u_n - 9</math></p> <p>فإن : <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{(u_n - 3)(2u_n + 3)}{u_n + 2}</math></p>	1
<p>لنبين بالترجع أن <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 3</math>  بالنسبة لـ <math>n=0</math> ، لدينا : <math>u_0 = 4</math> : منه : <math>u_0 \geq 3</math>  نفترض أن : <math>u_n \geq 3</math> و نبين أن : <math>u_{n+1} \geq 3</math></p> <p>و بما أن <math>u_n \geq 3</math> (حسب الافتراض) فإن <math>u_n - 3 \geq 0</math> و <math>2u_n + 3 &gt; 0</math> و <math>u_n + 2 &gt; 0</math>  إذن حسب السؤال السابق <math>u_{n+1} - 3 \geq 0</math> : ومنه : <math>u_{n+1} \geq 3</math></p>	ب
<p>لدينا <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} - u_n = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{2u_n^2 - 3 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{u_n^2 - 2u_n - 3}{u_n + 2}</math></p> <p>و بما أن : <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n - 3)(u_n + 1) = u_n^2 + u_n - 3u_n - 3 = u_n^2 - 2u_n - 3</math></p> <p>فإن : <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 2}</math></p>	2
<p>بما أن <math>u_n \geq 3</math> فإن : <math>u_n - 3 \geq 0</math> و <math>u_n + 1 &gt; 0</math> و <math>u_n + 2 &gt; 0</math> : ومنه <math>u_{n+1} - u_n \geq 0</math>  و بالتالي : <math>(u_n)</math> تزايدية</p>	ب
<p>⬠ : لاحظ تقنية استعمال الفرق جد مهمة ، لكن يمكن البرهان مباشرة في بعض الحالات كما هو الشأن في التمرين 4</p>	

## تمرين 7

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} \end{cases}$$

لنبين بالترجع أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 4$

بالنسبة لـ  $n = 0$  ، لدينا :  $u_0 = 1$  منه :  $u_0 \leq 4$

نفترض أن :  $u_n \leq 4$  ونبين أن :  $u_{n+1} \leq 4$

لدينا :  $u_n \leq 4 \Rightarrow 2u_n \leq 8 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq 16 \Rightarrow 2u_n + 8 \leq \sqrt{16} \Rightarrow u_{n+1} \leq 4$

♦ يمكن أيضا استعمال تقنية الفرق، لكن يجب استعمال المرافق، كما يلي:

$$u_{n+1} - 4 = \sqrt{2u_n + 8} - 4 = \frac{2u_n + 8 - 16}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} = \frac{2(u_n - 4)}{\sqrt{2u_n + 8} + 4} \leq 0$$

## تمرين 8

لندرس رتبة المتتاليات التالية

$n \in \mathbb{N}$  لدينا لكل  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2n}{n+1}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = 2 \left( \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) = 2 \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = 2 \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} \\ &= 2 \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

إذن  $(u_n)$  **تزايدية**

$n \in \mathbb{N}^*$  لدينا لكل  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$$v_{n+1} - v_n = \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

إذن  $(v_n)$  **تزايدية**

$n \in \mathbb{N}$  لدينا لكل  $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \frac{n+1}{3^n}$

$$w_{n+1} - w_n = \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{n+2 - 3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{n+2 - 3n - 3}{3^{n+1}} = \frac{-2n-1}{3^{n+1}} < 0$$

إذن  $(w_n)$  **تناقصية**

$n \in \mathbb{N}^*$  لدينا لكل  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = n^3 - n$

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)^3 - (n+1) - (n^3 - n) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 - n^3 + n = 3n^2 + 3n > 0$$

إذن  $(w_n)$  **تزايدية**

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geq 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{لدينا لكل} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$$

إذن  $(u_n)$  **تزايدية**

تمرين 9

$(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 2$  و أساسها  $r = 3$

1 لدينا :  $u_7 = u_0 + 7r = 2 + 21 = 23$  و  $u_{11} = u_0 + 11r = 2 + 33 = 35$

2  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = \frac{u_0 + u_{99}}{2} \times 100 = 100 \times \frac{2 + u_0 + 99r}{2} = 50(2 + 2 + 297) = 50 \times 301 = 15050$

♦ : 100 تمثل عدد الحدود  $(99 - 0 + 1 = 100)$

تمرين 10

$(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = -1$

1 نعلم أن :  $u_{10} = u_0 + 10r$  منه :  $u_{10} - u_0 = 10r$  منه :  $r = \frac{u_{10} - u_0}{10} = \frac{59 - (-1)}{10} = \frac{60}{10} = 6$

2  $S = u_3 + u_4 + \dots + u_{22} = \frac{u_3 + u_{22}}{2} \times 20 = 20 \times \frac{u_0 + 3r + u_0 + 22r}{2} = 10(-1 + 18 - 1 + 132) = 10 \times 148 = 1480$

♦ : 20 تمثل عدد الحدود  $(22 - 3 + 1 = 20)$

تمرين 11

$(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0$  و أساسها  $r$

1 نعلم أن :  $u_3 = u_0 + 3r$  منه :  $u_0 + 3r = 12$   
و نعلم أن :  $u_{17} = u_0 + 17r$  منه :  $u_0 + 17r = 82$   
نحصل على النظام :

$$\begin{cases} u_0 + 3r = 12 \\ u_0 + 17r = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 12 - 3r \\ 12 - 3r + 17r = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 12 - 3r \\ 14r = 82 - 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 12 - 3 \times 5 \\ r = \frac{70}{14} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = -3 \\ r = 5 \end{cases}$$

2  $S = u_0 + u_4 + \dots + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1) = (n+1) \times \frac{u_0 + u_0 + rn}{2} = (n+1) \times \frac{-3 - 3 + 5n}{2} = \frac{(n+1)(5n-6)}{2}$

♦ :  $n+1$  تمثل عدد الحدود  $(n - 0 + 1 = n+1)$

تمرين 12

$(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0 = 3$  و أساسها  $r = 2$

1 لدينا :  $u_3 = u_0 \times r^3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$  و  $u_6 = u_0 \times r^6 = 3 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192$

2  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_5 = u_0 \times \frac{1 - r^6}{1 - r} = 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 64}{-1} = 3 \times 63 = 189$

♦ :  $u_0$  تمثل أول حدود المجموع  $S$  و 6 تمثل عدد الحدود  $(5 - 0 + 1 = 6)$



تمرين 13

$$r = \frac{1}{2} \text{ هندسية أساسها } (u_n)$$

$$u_0 = \frac{u_3}{r^3} = \frac{\frac{5}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{1}{8}} = 5 \text{ لدينا : } u_3 = u_0 \times r^3 \text{ منه}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = (u_0 \times r^1) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 5 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$u_1$  : تمثل أول حدود المجموع  $S$  و  $n$  عدد الحدود  $(n-1+1=n)$

تمرين 14

$$v_n = \frac{1}{u_n - 3} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \end{cases}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 3(6 - u_n)}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3}$$

$$= \frac{6 - u_n}{9 - 18 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{3(-3 + u_n)} - \frac{3}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)} = \frac{1}{3}$$

بالتالي  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{3}$  و حدها الأول  $v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$

$$v_n = v_0 + r n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} n = \frac{4n - 3}{12}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 3 = \frac{12}{4n - 3} + 3 = \frac{12 + 12n - 9}{4n - 3} = \frac{12n + 3}{4n - 3} \text{ لدينا : } v_n = \frac{1}{u_n - 3} \text{ منه : } u_n - 3 = \frac{1}{v_n} \text{ منه}$$

$$S = v_0 + v_2 + \dots + v_6 = \frac{v_0 + v_6}{2} \times 7 = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{4 \times 6 - 3}{12}}{2} \times 7 = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{24 - 3}{12}}{2} \times 7 = \frac{\frac{-3 + 24 - 3}{12}}{2} \times 7 = \frac{18}{24} \times 7 = \frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4}$$

تمرين 15

$v_n = u_n - \frac{5}{3} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 1 \quad n \geq 0 \end{cases}$	
1	<p>لدينا : <math>v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n + 1 - \frac{5}{3} = \frac{2}{5}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}\left(v_n + \frac{5}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5}v_n</math></p> <p>إذن <math>(v_n)</math> متتالية هندسية أساسها <math>q = \frac{2}{5}</math> و حدها الأول <math>v_0 = u_0 - \frac{5}{3} = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}</math></p>
2	$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ <p>ولدينا : <math>v_n = u_n - \frac{5}{3}</math> منه : <math>u_n = v_n + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{5}{3}</math></p>
3	$S = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{9} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

تمرين 16

$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$	
1	$v_1 = u_2 - u_1 = \frac{11}{2} - 4 = \frac{3}{2}$ $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$ $u_3 = \frac{3}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_1 = \frac{33}{4} - \frac{4}{2} = \frac{25}{4}$ $u_2 = \frac{3}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{12}{2} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$
2	$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$ <p>إذن <math>(v_n)</math> متتالية هندسية أساسها <math>q = \frac{1}{2}</math> و حدها الأول <math>v_0 = 3</math></p>
3	<p>لدينا <math>v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0</math></p>
4	<p>لدينا حسب السؤال السابق : <math>u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)</math></p> <p>إذن : <math>u_n = 6 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \frac{6}{2^n} + 1 = 7 - \frac{6}{2^n}</math></p>
<p>يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض <math>n</math> بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 ومقارنتها بنتائج السؤال الأول</p>	

تمرين 17

$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 7 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$				
$v_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$	$u_2 = \frac{2u_1 + v_1}{3} = \frac{6+4}{3} = \frac{10}{3}$	$v_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$	$u_1 = \frac{2u_0 + v_0}{3} = \frac{2+7}{3} = 3$	1
$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$ <p>إذن <math>(v_n)</math> متتالية هندسية أساسها <math>q = \frac{1}{2}</math> و حدها الأول <math>v_0 = 3</math></p>				2
<p>لدينا <math>v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0</math></p>				3
<p>لدينا حسب السؤال السابق : <math>u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)</math></p> <p>إذن : <math>u_n = 6\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \frac{6}{2^n} + 1 = 7 - \frac{6}{2^n}</math></p>				4
<p>يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض <math>n</math> بالقيم 0 و 1 و 2 و 3 ومقارنتها بنتائج السؤال الأول</p>				

تمرين 18

$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}; v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$				
<p>لدينا : <math>w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15} = \frac{2v_n - 2u_n}{15} = \frac{2(v_n - u_n)}{15} = \frac{2}{15}w_n</math></p> <p>إذن <math>(w_n)</math> متتالية هندسية أساسها <math>q = \frac{2}{5}</math> و حدها الأول <math>w_0 = v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1</math></p> <p>منه : <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 \times q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n</math></p>				1
<p>لدينا : <math>t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2(u_n + 4v_n) = u_n + 2v_n + 2u_n + 8v_n = 3u_n + 10v_n = t_n</math></p> <p>إذن <math>(t_n)</math> متتالية ثابتة، منه : <math>\forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 3 + 20 = 23</math></p>				2
<p>لدينا حسب ما سبق : <math>\begin{cases} v_n - u_n = w_n \\ 3u_n + 10v_n = t_n \end{cases}</math> منه : <math>\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 3u_n + 10(w_n + u_n) = t_n \end{cases}</math> منه : <math>\begin{cases} v_n = \frac{t_n + 3w_n}{13} \\ u_n = \frac{t_n - 10w_n}{13} \end{cases}</math></p> <p>منه : <math>\begin{cases} v_n = w_n + u_n \\ 13u_n = t_n - 10w_n \end{cases}</math> منه : <math>\begin{cases} v_n = w_n + \frac{t_n - 10w_n}{13} \\ u_n = \frac{t_n - 10w_n}{13} \end{cases}</math></p>				3

$$\begin{cases} v_n = \frac{23 + 3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{13} \\ u_n = \frac{23 - 10\left(\frac{2}{5}\right)^n}{13} \end{cases}$$

بالتالي :

⚡ : لاحظ أن السؤال الأخير يعتمد على حل نظمة من الدرجة الأولى ذات المجهولين  $u_n$  و  $v_n$  و اعتبار  $w_n$  و  $t_n$  معلومين لكونهما يتوفران على الصيغة العامة لكل منهما.

### تمرين 19

نعلم أن :  $u_6 = u_0 + 6r$  و  $u_3 + u_4 + u_5 = u_0 + 3r + u_0 + 4r + u_0 + 5r = 3u_0 + 12r$

لدينا :  $u_6 = -7$  و  $u_3 + u_4 + u_5 = -9$

$$\begin{cases} u_0 + 6r = -7 \\ 3u_0 + 12r = -9 \end{cases} \quad \text{إذن نحصل على النظمة :} \quad \text{منه :} \quad \begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ 3(-7 - 6r) + 12r = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ r = \frac{12}{-6} = -2 \end{cases} \quad \text{منه :} \quad \begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ -6r = -9 + 21 = 12 \end{cases} \quad \text{منه :} \quad \begin{cases} u_0 = -7 - 6r \\ -21 - 18r + 12r = -9 \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = \frac{u_0 + u_{100}}{2} \times 101 = 101 \frac{5 + u_0 + 100r}{2} = 101 \frac{5 + 5 - 200}{2} = 101 \times \frac{-190}{2}$$

$$S = 101 \times (-95) = -9595$$

### تمرين 20

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 3 \frac{1-2^n}{-1} = 3(2^n - 1)$$

لدينا متتالية هندسية أساسها  $r = 2$  منه :  $v_{n+1} = 2v_n$

منه :  $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = (2v_n)^2 = 4v_n^2 = 4w_n$  إذن :  $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = (2v_n)^2 = 4v_n^2 = 4w_n$  متتالية هندسية أساسها  $q = 4$

لدينا :

$$T_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2 = w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = w_0 \frac{1-q^n}{1-q} = v_0^2 \frac{1-4^n}{1-4} = 9 \frac{1-4^n}{-3} = 9 \frac{4^n - 1}{3} = 3(4^n - 1)$$

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3n+1} \end{cases}$		
$u_2 = \frac{u_1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$u_1 = \frac{u_0}{0+1} = 2$	<b>1</b>
<p>بالنسبة لـ <math>n=0</math> ، لدينا : <math>u_0 = 2 &gt; 0</math> ،  نفترض أن <math>u_n &gt; 0</math></p> <p>لدينا : <math>n \geq 0</math> منه : <math>3n+1 \geq 1 &gt; 0</math> ، إذن <math>\frac{u_n}{3n+1} &gt; 0</math> أي <math>u_{n+1} &gt; 0</math></p> <p>بالتالي : <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &gt; 0</math></span></p>		<b>2</b>
<p>لدينا : <math>u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n \left( \frac{1}{3n+1} - 1 \right) = u_n \frac{1-3n-1}{3n+1} = -\frac{3nu_n}{3n+1} \leq 0</math></p> <p>بالتالي <math>(u_n)</math> متتالية تناقصية.</p>		<b>3</b>
<p>لدينا <math>\frac{1}{4} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{u_n}{3n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n+1-4}{4(3n+1)} = \frac{3n-3}{4(3n+1)} = \frac{3(n-1)}{4(3n+1)}</math></p> <p>إذن لكل <math>n \in \mathbb{N}^*</math> لدينا <math>\frac{3(n-1)}{4(3n+1)} \geq 0</math> ومنه <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}</math></span></p>		<b>أ</b>
<p>لدينا حسب السؤال السابق : <math>\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{4}</math> و <math>\frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{4}</math> و ... و <math>\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}</math></p> <p>و بضرب هذه المتفاوتات (ذات الأطراف الموجبة) طرفاً بطرف نجد أن : <math>\frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times \dots \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}</math></p> <p>أي : <math>\frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}</math> منه : <math>u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u_0</math> : منه : <math>u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 4 \times 2</math> : منه : <span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq 8 \left(\frac{1}{4}\right)^n</math></span></p> <p>بالتالي :</p>		<b>ب</b>

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} \end{cases}$$

بالنسبة لـ  $n=0$  ، لدينا :  $|u_0| = 0$  منه  $|u_0| < \frac{1}{2}$

نفترض أن  $|u_n| < \frac{1}{2}$  ونبين أن  $|u_{n+1}| < \frac{1}{2}$

لدينا : 
$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$|u_n| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_n + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2} < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < u_{n+1} < \frac{-1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow |u_{n+1}| < \frac{1}{2}$$

بالتالي : 
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| < \frac{1}{2}}$$

1

لدينا :  $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} - u_n = u_n^2 - \frac{1}{4}$  وبما أن  $|u_n| < \frac{1}{2}$  فإن  $u_n^2 < \frac{1}{4}$  أي :  $u_n^2 - \frac{1}{4} < 0$   
بالتالي  $(u_n)$  متتالية تناقصية.

2

بالنسبة لـ  $n=0$  ، لدينا :  $\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^1 = u_0 + \frac{1}{2}$

نفترض أن  $u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$  ونبين أن :  $u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$

$$u_{n+1} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2$$

لدينا : 
$$= \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n \times 2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

بالتالي : 
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

3