سلسلة 1	الحساب المثلثـــــي	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

1) α قياس زاوية حيث : $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ و $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

أ) احسب $\cos 2\alpha$

ب) استنتج حساب α

2) β قياس زاوية حيث : $\tan\beta=2+\sqrt{3}$ و $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

أ) احسب $\tan 2\beta$

ب) استنتج حساب β

تمرين 2 :

α قياس زاوية حيث : $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ و $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ ، احسب $\sin 2\alpha$ و احسب $\cos 3\alpha$

تمرين 3 :

1) بين أن : $\forall x\in IR \quad \left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2=1+\sin x$

2) بين أن : $\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1 \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \ / k\in Z$

3) بين أن : $\forall x\in IR \quad \cos^4 x=\cos 2x+\sin^4 x$

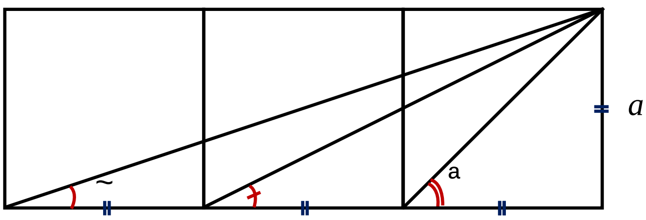
4) بين أن : $\forall x\in IR \quad \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x.\cos^2 x=1$

تمرين 4 : x و y عددان حقيقيان حيث : $\begin{cases}\sin x+\cos y=\sqrt{2}\\ \sin^2 x+\cos^2 y=1\end{cases}$ و $(x,y)\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]^2$

1) احسب التعبير $\left(\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\cos y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

2) استنتج قيمة كل من x و y

تمرين 5 : نعتبر الشكل التالي :



1) احسب $\tan\alpha$ و $\tan\beta$

2) استنتج أن : $\gamma=\alpha+\beta$

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	الحساب المثلثـــي حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 :

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ، $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

1 أ) لدينا: $\cos 2\alpha=2\cos^2(\alpha)-1=2\frac{8+2\sqrt{12}}{16}-1=\frac{8+4\sqrt{3}}{8}-1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) لدينا $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ إذن : $0<2\alpha<\pi$ ، و بما أن : $\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $2\alpha=\frac{\pi}{6}$ منه: $\boxed{\alpha=\frac{\pi}{12}}$

2) $0<\quad<\frac{\pi}{2}$ ، $\tan\quad=2+\sqrt{3}$

أ) لدينا: $\tan 2\quad=\frac{2\tan\quad}{1-\tan^2\quad}=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{1-\left(7+4\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{-6-4\sqrt{3}}=\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)}{3+2\sqrt{3}}=\frac{-\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$

ب) لدينا $0<\quad<\frac{\pi}{2}$ منه: $0<2\quad<\pi$ و بما أن: $\tan 2\quad=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ فإن: $2\quad=\frac{5\pi}{6}$ بالتالي: $\boxed{\quad=\frac{5\pi}{12}}$

من الضروري حفظ النسب المثلثية للزوايا الخاصة : $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و بقية النسب يمكنك استخراجها مستعملا الدائرة المثلثية أو خاصيات الحساب المثلثي. فمثلا $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{3}$

تمرين 2 : $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ ، $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

نعلم أن: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ منه: $\sin^2\alpha+\frac{9}{25}=1$ منه: $\sin^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

و بما أن: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ فإن: $\sin\alpha>0$ منه : $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ بالتالي : $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$

لدينا:

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha.\cos\alpha-\sin 2\alpha.\sin\alpha=\left(2\cos^2\alpha-1\right)\cos\alpha-\sin 2\alpha.\sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha=\left(\frac{18}{25}-1\right)\times\frac{3}{5}-\frac{24}{25}\times\frac{4}{5}=\frac{-7}{25}\times\frac{3}{5}-\frac{96}{125}=\frac{-117}{125}$$

لا يجب نسيان تطبيق الخاصية الأساسية للحساب المثلثي $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ كلما دعت الحاجة لذلك.

تمرين 3 :

1 لدينا: $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+2\left(\sin\frac{x}{2}\right).\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1+\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)=1+\sin x$

2 لدينا: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ /k\in Z\Rightarrow\frac{1}{\cos^2x}-1=\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}=\tan^2x$

3 لدينا:

$$\cos^4x-\sin^4x=\left(\cos^2x+\sin^2x\right)\left(\cos^2x-\sin^2x\right)$$

$$\cos^4x-\sin^4x=1\times(\cos x\cos x-\sin x\sin x)$$ بالتالي: $\forall x\in IR\quad\cos^4x=\cos 2x+\sin^4x$

$$\cos^4x-\sin^4x=\cos(x+x)=\cos(2x)$$

4 لدينا:

$$A=\sin^6x+\cos^6x+3\sin^2x.\cos^2x=\left(\sin^2x\right)^3+\left(\cos^2x\right)^3++3\sin^2x.\cos^2x$$

$$A=\left(\sin^2x+\cos^2x\right)\left(\sin^4x-\sin^2x.\cos^2x+\cos^4x\right)+3\sin^2x.\cos^2x$$

$$A=\sin^4x+2\sin^2x.\cos^2x+\cos^4x=\left(\sin^2x+\cos^2x\right)^2=1$$

تمرين 4 : $\begin{cases}\sin x+\cos y=\sqrt{2}\\ \sin^2x+\cos^2y=1\end{cases}$ ، $(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$

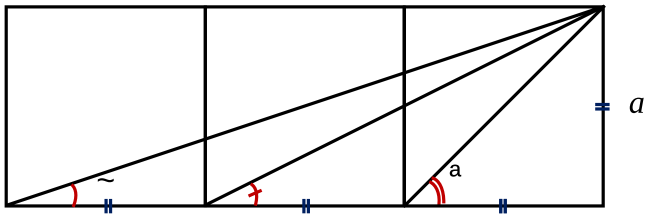
1 لدينا :

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y-\sqrt{2}\cos y+\frac{1}{2}+\cos^2 x-\sqrt{2}\cos x+\frac{1}{2}$$

$$\left(\cos y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\cos^2 y+\cos^2 x-\sqrt{2}(\cos y+\cos x)+1=1-2+1=0$$

2 من السؤال السابق نستنتج أن : $\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، و بما أن $(x,y)\in\left[0,\frac{®}{2}\right]^2$ فإن : $x=y=\frac{®}{4}$

تمرين 5 :



1 لدينا: $\tan\sim=\frac{a}{3a}=\frac{1}{3}$ و $\tan\sim=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

2 لدينا : $\tan ª=\frac{a}{a}=1$ و $\tan(\sim+\ \ )=\frac{\tan\sim+\tan}{1-\tan\sim\tan}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$

منه: $\tan(\sim+\ \ )=1$

ولدينا : $\begin{cases}\tan\sim=\frac{1}{2}<1=\tan\left(\frac{®}{4}\right)\\ 0<\sim<\frac{®}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\sim<\frac{®}{4}$ و $\begin{cases}\tan\ \ =\frac{1}{3}<1=\tan\left(\frac{®}{4}\right)\\ 0<\ \ <\frac{®}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\ \ <\frac{®}{4}$

منه: $0<\sim+\ \ <\frac{®}{2}$

الآن : $\begin{cases}0<\sim+\ \ <\frac{®}{2}\\ \tan(\sim+\ \ )=1\end{cases}\Rightarrow\sim+\ \ =\frac{®}{4}$ و $\begin{cases}0<\sim+\ \ <\frac{®}{2}\\ \tan(\sim+\ \ )=1\end{cases}\Rightarrow\sim+\ \ =\frac{®}{4}$ بالتالي : $\boxed{\sim+\ \ =ª}$

فكرة التمرين واضحة : للبرهان على تساوي زاويتين نبرهن على تساوي إحدى النسب المثلثية (في المثال الظل) مع إمكانية تطبيق قواعد الجمع و الطرح، لكن يجب الانتباه أن الاستنتاج لا يكون كاملا إلا إذا برهنا أن الزاويتين تنتميان معا لمجال من الشكل $\left]\frac{-®}{2}+k®;\frac{®}{2}+k®\right[$ حيث $k\in Z$ لأن العبارة : $\tan x=\tan y\Rightarrow x=y$ لا تكون صحيحة إلا مع الشرط السابق.