تمارين : الحساب المثلثي

01

1. بسط : $\frac{\cos 3x}{\cos x}-\frac{\sin 3x}{\sin x}$.
2. بين أن : $2\sin 2x=\frac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{1+\cos 2x+\cos 4x}$.

02

1. حل المعادلة : $\frac{1}{2}=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

03

لنعتبر $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (الوحدة هي رديان) حيث $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ و $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

1. أوجد قيمة $\sin 2\alpha$ ثم استنتج قيمة α .
2. حل المعادلة : $\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=0$; $x\in[0,2\pi]$

04

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب: $f(x)=4\cos^2(x)+\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2(x)-4$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أن : f دورية و دورها $T=\pi$. ثم استنتج D_E مجموعة دراسة f .
3. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

   ب- حل المعادلة : $x\in\mathbb{R} : f(x)=0$ ومثل حلولها على الدائرة المثلثية .
4. حل المتراجحة : $x\in[0,\pi[\; : f(x)\leq 0$.
5. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

   ب- أحسب $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ثم استنتج قيمتي $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

05

1. بين أن : إذا كانت A و B و C قياسات زوايا مثلث فإن $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\times\tan B\times\tan C$.

01.

1. نبسط : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}$.

لدينا : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=\dfrac{\sin 3x\cos x-\cos 3x\sin x}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin(3x-x)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=\dfrac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x}=2$.

خلاصة : $\boxed{\dfrac{\sin 3x}{\sin x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=2}$.

2. نبين أن : $\dfrac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{1+\cos 2x+\cos 4x}=2\sin 2x$

لدينا :

$$\frac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{1+\cos 2x+\cos 4x}=\frac{\sin 2x+\sin 6x+\sin 4x}{1+\cos(2(2x))+\cos 2x}=\frac{2\sin\left(\frac{2x+6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right)+\sin 4x}{1+2\cos^2(2x)-1+\cos 2x}$$

$$=\frac{2\sin(4x)\cos(-2x)+\sin 4x}{2\cos^2(2x)+\cos 2x}=\frac{\sin(4x)\cancel{\left[2\cos(-2x)+1\right]}}{\cos 2x\cancel{\left[2\cos(2x)+1\right]}}=\frac{\sin(4x)}{\cos 2x}=\frac{2\sin(2x)\cancel{\cos(2x)}}{\cancel{\cos 2x}}=2\sin(2x)$$

خلاصة : $\boxed{\dfrac{\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x}{1+\cos 2x+\cos 4x}=2\sin 2x}$.

02.

1. حل المعادلة : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$.

لدينا :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\cos\left(\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)+\cos\left(\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\cos(2x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases};\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{cases};\ k\in\mathbb{Z}$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\left\{x=\frac{\pi}{6}+k\pi, x=\frac{\pi}{6}-k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.

.03

1. أوجد قيمة $\sin 2\alpha$ ثم استنتج قيمة α .

لدينا : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

خلاصة : $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$

نستنتج قيمة α :

لدينا : $\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin 2\alpha=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\ 2\alpha=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases};k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ \alpha=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{cases};k\in\mathbb{Z}$.

لدينا : $\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ \alpha=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{cases};k\in\mathbb{Z}$ و $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ إذن : $\alpha=\frac{\pi}{12}$

خلاصة : $\alpha=\frac{\pi}{12}$.

2. حل المعادلة : $x\in[0,2\pi];\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=0$

لدينا :

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cos x+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12}\cos x+\sin\frac{\pi}{12}\sin x\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases};\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

الحلول التي تنتمي ل $[0,2\pi]$

بالنسبة للحل $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ نضع $0 \le \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \le 2\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ نحصل بعد الحسابات $k = 0$ أما $x = \frac{7\pi}{12}$.

بالنسبة للحل $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ نضع $0 \le -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \le 2\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ نحصل بعد الحسابات $k = 1$ أما $x = \frac{19\pi}{12}$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$

.04

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

لدينا : الدالتين : $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ معرفتين على $\mathbb{R}$. إذن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ (مجموع و جداء دوال معرفة على $\mathbb{R}$.

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

2. بين أن : f دورية و دورها $T = \pi$. ثم استنتج D_E مجموعة دراسة f .

- لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$ كذلك $x + \pi \in \mathbb{R}$ و $x - \pi \in \mathbb{R}$.
- ليكن x من $\mathbb{R}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= 4\cos^2(x+\pi) + \sqrt{3}\sin(x+\pi)\cos(x+\pi) + 3\sin^2(x+\pi) - 4 \\ &= 4(-\cos x)^2 + \sqrt{3}(-\sin x)(-\cos x) + 3(-\sin x)^2 - 4 \\ &= 4\cos^2(x) + \sqrt{3}\sin x\cos x + 3\sin^2(x) - 4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه : $f(x+\pi) = f(x)$

خلاصة : f دورية و دورها $T = \pi$.

استنتاج : D_E مجموعة دراسة f.

بما أن : f دورية و دورها $T = \pi$ إذن : $D_E = [0,\pi] \cap \mathbb{R}^+ = [0,\pi]$

خلاصة : مجموعة دراس f هي $D_E = [0,\pi]$.

3.

أ- نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

لدينا :

$$f(x)=4\cos^2(x)+\sqrt{3}\sin x\cos x+3\sin^2(x)-4 \Leftrightarrow f(x)=\underbrace{4\cos^2(x)+4\sin^2(x)}_{4}-\sin^2(x)+\sqrt{3}\sin x\cos x-4$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\cancel{4}-\sin^2(x)+\sqrt{3}\sin x\cos x\cancel{-4}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\sin x\left[-\sin x+\sqrt{3}\cos x\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x)=2\sin x\left[-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x)=2\sin x\left[-\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

ومنه : $f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

خلاصة : $f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

ب- حل المعادلة : $x\in\mathbb{R} : f(x)=0$ ومثل حلولها على الدائرة المثلثية .

لدينا : $f(x)=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sin x=0 \text{ أو } \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=\sin 0 \text{ أو } \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$$

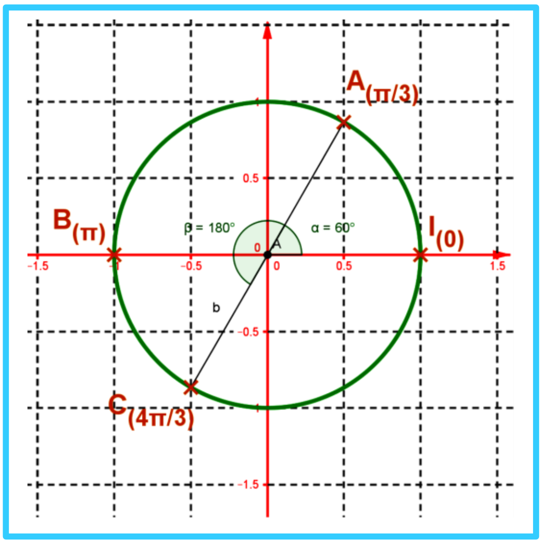
$$\Leftrightarrow x=k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z} \text{ أو } x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z} \text{ أو } x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z} \text{ أو } x=\frac{\pi}{3}+k\pi \;;\; k\in\mathbb{Z}$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\left\{x=k\pi\ ,\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

نمثل الحلول على الدائرة المثلثية :



ت- حل المتراجحة : $x\in[0,\pi[\ : f(x)\le 0$.

4. حل المتراجحة : $x\in[0,\pi[\ : f(x)\le 0$.

لدينا : $x\in[0,\pi[\ : f(x)\le 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 0$

بالنسبة ل $\sin x$:

على المجال $]0,\pi[$: $\sin x>0$ وتنعدم في $x=0$.

بالنسبة ل $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$:

لدينا : $x\in[0,\pi[\Leftrightarrow 0\le x<\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$

ومنه : $\frac{\pi}{6}\le x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$ فإن : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>0$ أي $0\le x<\frac{\pi}{3}$ فإن : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>0$

$x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ فإن : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$. أي $x=\frac{\pi}{3}$ فإن : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$.

$\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$ فإن : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<0$. أي $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ فإن : $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)<0$.

لنعتبر جدول الإشارة التالي :

x	0		$\pi/3$		π
$\sin x$		$+$		$+$	
$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$		$+$	0	$-$	
$f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$		$+$	0	$-$	

خلاصة : من خلال الجدول نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة : $S=\left[\frac{\pi}{3},\pi\right[$

5.

أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
f(x)&=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\
&=2\sin x\left[\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right]\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\sin^2 x\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{\cos 2x-1}{2} \quad ; \quad \left(\cos 2x=1-2\sin^2 x\right)\\
&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\\
&=\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x-\frac{1}{2}\\
&=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

خلاصة : $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$.

ب- أحسب $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ثم استنتج قيمتي $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

لدينا : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}=\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=f\left(\frac{\pi}{12}\right)\quad:\quad(1)$

وكذلك : $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{12}\right)\quad:\quad(2)$

من خلال (1) و (2) نحصل على : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

من جهة أخرى : $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)=1-\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

ومنه : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ (لأن $\frac{\pi}{12}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ إذن $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\geq 0$)

خلاصة : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ و $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

.05

1. بين أن : إذا كانت A و B و C قياسات زوايا مثلث فإن $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\times\tan B\times\tan C$.

لدينا : ABC مثلث إذن : مجموع قياسات زواياه هي $A+B+C=\pi$

و منه : $A+B=\pi-C$.

و بالتالي :

$$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)\Leftrightarrow\frac{\tan(A)+\tan(B)}{1-\tan(A)\tan(B)}=-\tan(C);\left(\tan(\pi-C)=-\tan(C)\right)$$

$$\Leftrightarrow\tan(A)+\tan(B)=-\tan(C)\left[1-\tan(A)\tan(B)\right]$$

$$\Leftrightarrow\tan(A)+\tan(B)=-\tan(C)+\tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

$$\Leftrightarrow\tan(A)+\tan(B)+\tan(C)=\tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

ومنه : $\tan(A)+\tan(B)+\tan(C)=\tan(A)\tan(B)\tan(C)$.

خلاصة : $\tan(A)+\tan(B)+\tan(C)=\tan(A)\tan(B)\tan(C)$