

تمرين 1 :

$$\forall x \in \mathbb{R} / x \neq kf, k \in \mathbb{Z} \quad \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{\sin 8x}{8 \sin x} \quad (1) \text{ بين أن :}$$

$$(2) \text{ استنتج حساب الجدائين : } A = \cos \frac{f}{7} \cdot \cos \frac{2f}{7} \cdot \cos \frac{4f}{7} \quad \text{و} \quad B = \cos \frac{f}{9} \cdot \cos \frac{2f}{9} \cdot \cos \frac{4f}{9}$$

تمرين 2 :

$$\forall x \in \mathbb{R} / x \neq f + 2kf, k \in \mathbb{Z} \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (1) \text{ بين أن :}$$

$$(2) \text{ استنتج حساب : } \tan \frac{f}{12}$$

$$(3) \text{ احسب : } \cos \frac{f}{12} \text{ و } \sin \frac{f}{12}$$

تمرين 3 : ليكن x عددا حقيقيا ، بين أن :

$$\cos x + \cos \left(x + \frac{2f}{3} \right) + \cos \left(x - \frac{2f}{3} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sin x + \sin \left(x + \frac{2f}{3} \right) + \sin \left(x + \frac{4f}{3} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{f}{4} \right) \quad (3)$$

تمرين 4 : لتكن x و y و z أعدادا حقيقية حيث : $x + y + z = f$ ، بين المتساويات التالية :

$$\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \sin z \quad (1)$$

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{z}{2} \quad (2)$$

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z \quad (3)$$

تمرين 5 : ليكن x عددا حقيقيا ، حول إلى جداء التعابير التالية :

$$C = 1 - \cos 2x - \sin 2x \quad , \quad B = 1 - \cos 2x + \cos 3x - \cos 5x \quad , \quad A = \sin x + \sin 3x + 2 \sin 2x$$

$$F = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x \quad , \quad E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x \quad , \quad D = 1 + 2 \cos x + \cos 2x$$

تمرين 1 :

لدينا لكل $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(8x) = 2 \cos(4x) \sin(4x) = 2 \cos(4x) (2 \cos(2x) \sin(2x)) = 4 \cos(4x) \cos(2x) (2 \cos(x) \sin(x))$$

$$\sin(8x) = 8 \cos(4x) \cos(2x) \cos(x) \sin(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \bigcup \left\{ \frac{f}{2} + kf ; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{\sin 8x}{8 \sin x} \quad \text{بالتالي :}$$

1

$$A = \cos \frac{f}{7} \cdot \cos \frac{2f}{7} \cdot \cos \frac{4f}{7} = \frac{\sin\left(\frac{8f}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{f}{7}\right)} = \frac{\sin\left(f + \frac{f}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{f}{7}\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{f}{7}\right)}{8 \sin\left(\frac{f}{7}\right)} = \frac{-1}{8} \quad \text{حسب السؤال السابق :}$$

2

$$B = \cos \frac{f}{9} \cdot \cos \frac{2f}{9} \cdot \cos \frac{4f}{9} = \frac{\sin\left(\frac{8f}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{f}{9}\right)} = \frac{\sin\left(f - \frac{f}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{f}{9}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{f}{9}\right)}{8 \sin\left(\frac{f}{9}\right)} = \frac{1}{8} \quad \text{و}$$

استعملنا الخاصية الهامة : $\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$

تمرين 2 :

$$\forall x \in \mathbb{R} / x \neq f + 2kf \quad \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{لدينا :}$$

1

$$\tan\left(\frac{f}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{f}{6}\right)}{1 + \cos\left(\frac{f}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{حسب السؤال السابق :}$$

2

$$\tan^2\left(\frac{f}{12}\right) + 1 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{f}{12}\right)} \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{f}{12}\right)} = 1 + (2 - \sqrt{3})^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} = 4(2 - \sqrt{3}) \quad \text{منه :}$$

$$\cos\left(\frac{f}{12}\right) \geq 0 \quad \text{فإن } \frac{f}{12} \in \left[0, \frac{f}{2}\right] \quad \text{وبما أن : } \cos^2\left(\frac{f}{12}\right) = \frac{1}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \quad \text{منه :}$$

3

$$\sin\left(\frac{f}{12}\right) = \cos\left(\frac{f}{12}\right) \times \tan\left(\frac{f}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \times (2 - \sqrt{3})$$

$$\sin\left(\frac{f}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

وبالتالي :

$$\cos\left(\frac{f}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \quad \text{منه :}$$

يجب أن نتذكر أن : $a = 2 \times \frac{a}{2}$ وأيضا أن لاننسى القواعد الأساسية التي تجمع بين النسب المثلثية الثلاث.

تمرين 3 :

$A(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2f}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{2f}{3}\right) : \text{نضع } x \in IR \text{ لكل}$ $A(x) = \cos x + \cos(x)\cos\left(\frac{2f}{3}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{2f}{3}\right) + \cos(x)\cos\left(\frac{2f}{3}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{2f}{3}\right)$ <p style="text-align: right;">لدينا :</p> $A(x) = \cos x - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\cos(x) = 0$	1
$B(x) = \sin x + \sin\left(x + \frac{2f}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4f}{3}\right) : \text{نضع } x \in IR \text{ لكل}$ $B(x) = \sin x + \sin(x)\cos\left(\frac{2f}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{2f}{3}\right) + \sin(x)\cos\left(\frac{4f}{3}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{4f}{3}\right)$ <p style="text-align: right;">لدينا :</p> $B(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) = 0$	2
$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{f}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin(x)\cos\left(\frac{f}{4}\right) + \cos(x)\sin\left(\frac{f}{4}\right) \right)$ <p style="text-align: right;">لدينا لكل $x \in IR$:</p> $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{f}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) \right) = \sin(x) + \cos(x)$	3

من الأفضل استعمال قواعد النشر عوض التعميل كلما أمكن ذلك

تمرين 4 : $x + y + z = f$

<p style="text-align: right;">لدينا : $\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \sin(x + y) = \sin(f - z) = \sin(z)$</p>	1
$\begin{aligned} \sin x + \sin y + \sin z &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{f-z}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{f}{2} - \frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cos\left(\frac{z}{2}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{z}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{z}{2}\right) \right] \\ &= 2 \cos\left(\frac{z}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{f-z}{2}\right) \right] \\ &= 2 \cos\left(\frac{z}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right] \\ &= 2 \cos\left(\frac{z}{2}\right) \times 2 \cos\left(\frac{\frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{2}}{2}\right) \end{aligned}$ <p style="text-align: right;">لدينا :</p> $\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos\left(\frac{z}{2}\right) \times 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{y}{2}\right)$	2

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \text{لدينا :}$$

$$\tan x + \tan y = \tan(x+y)(1 - \tan x \tan y) = \tan(f-z)(1 - \tan x \tan y) = -\tan z(1 - \tan x \tan y) \quad \text{منه :}$$

$$\tan x + \tan y = -\tan z + \tan x \tan y \tan z$$

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z \quad \text{بالتالي :}$$

قواعد التعميل ضرورية في كثير من التمارين، بالنسبة للظل التعميل يتم وفق الخاصية:

$$\tan x + \tan y = \tan(x+y)(1 - \tan x \tan y)$$

تمرين 5: ليكن x عددا حقيقيا، حول إلى جداء التعابير التالية:

$$B = 1 - \cos 2x + \cos 3x - \cos 5x$$

$$= 2 \sin^2 x - 2 \cos 4x \sin(-x)$$

$$B = 2 \sin x (\sin x + \cos 4x)$$

$$A = \sin x + \sin 3x + 2 \sin 2x$$

$$= 2 \sin(2x) \cos(-x) + 2 \sin 2x$$

$$A = 2 \sin 2x (\cos x + 1)$$

$$D = 1 + 2 \cos x + \cos 2x$$

$$= 1 + \cos 2x + 2 \cos x$$

$$= 2 \cos^2 x + 2 \cos x$$

$$D = 2 \cos x (\cos x + 1)$$

$$C = 1 - \cos 2x - \sin 2x$$

$$= 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$C = 2 \sin x (\sin x - \cos x)$$

$$F = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

$$= \sin 3x + \sin x + \sin 4x + \sin 2x$$

$$= 2 \sin(2x) \cos x + 2 \sin(3x) \cos x$$

$$= 2 \cos x (\sin(2x) + \sin(3x))$$

$$F = 4 \cos x \sin\left(\frac{5x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$= \cos 3x + \cos x + \cos 4x + \cos 2x$$

$$= 2 \cos(2x) \cos x + 2 \cos(3x) \cos x$$

$$= 2 \cos x (\cos(2x) + \cos(3x))$$

$$E = 4 \cos x \cos\left(\frac{5x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

تمرين لحفظ القواعد حيث من المفترض حفظها بإتقان وليس تأجيل ذلك لحين اقتراب الفرض، لأن استيعاب الخاصية جزء من الجواب.

لم يطلب في التمرين التعميل إلى عدد معين من العوامل لذلك يمكن الاكتفاء بعاملين كما هو الشأن في A و B و C و D

لكن من الأفضل خصوصا أثناء حل المعادلات التعميل بعدد عوامل أكبر كما هو الشأن في E و F.