سلسلة 1	الحدوديـــــــــات	الجذع المشترك العلمي والتكنلوجي

تمرين 1 : حدد الشكل المختصر و درجة كل حدودية مما يلي:

$P(x)=(x+1)(x-8)+(x-3)^2$ ، $Q(x)=2x^2(x+1)-(2x-1)(x^2+1)$

$H(x)=(x+2)^3+x^4-(x^2-1)^2$ ، $G(x)=x(2+5x)(x-\sqrt{2})$

تمرين 2 : a و b و c أعداد حقيقية

1) حدد a و b و c بحيث لكل عدد حقيقي x يكون لدينا: $(a-3)x^2+(1-b)x+8=(x-1)^2+5(x+c)+7$

2) حدد a و b و c بحيث لكل عدد حقيقي x يكون لدينا: $(x+5)(3x+4)+ax^2=3bx+5c$

3) حدد a و b و c بحيث لكل عدد حقيقي x يكون لدينا: $a(x+2)^2+b(x+2)+c=2x^2+9x+10$

تمرين 3 : نعتبر الحدودية : $P(x)=x^3+6x^2-x-30$

1) احسب : $P(0)$ و $P(1)$ و $P(2)$ و $P(\sqrt{2})$ و $P(-1)$

2) حدد من بين الأعداد السابقة جذور الحدودية $P(x)$

3) اكتب $P(x)$ على الشكل : $(x-2)Q(x)$ حيث $Q(x)$ حدودية من الدرجة الثانية

4) احسب : $Q(-3)$ ثم عمل $Q(x)$

5) عمل $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى

6) حل في IR المعادلة : $P(x)=0$

تمرين 4 : نعتبر الحدوديتين : $P(x)=4x^3-3x+1$ و $R(x)=4x^3-3x-1$

1) أ) بين أن الحدودية $P(x)$ تقبل القسمة على $x+1$

ب) حدد الحدودية $Q(x)$ التي تحقق : $P(x)=(x+1)Q(x)$

2) بين أن: $R(x)=(x-1)(2x+1)^2$

3) حل في IR المعادلتين : $P(x)=0$ و $R(x)=0$

4) حل في IR المتراجحتين : $P(x)\geq 0$ و $R(x)\leq 0$

5) استنتج مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تحقق : $-1\leq 4x^3-3x\leq 1$

تمرين 5 : لتكن: $P(x)=x^3-6x^2+10x-4$

1) أنجز قسمة $P(x)$ على $x-2$

2) بين أن: $P(x)-2(2-x)=(x-2)^3$

3) حل في IR المتراجحة : $|P(x)-2(2-x)|\leq 8\times 10^{-3}$

4) استنتج قيمة مقربة لـ $P(1{,}845)$ إلى 8×10^{-3}

تمرين 6 : $\boxed{\text{ـ مزيدا من التفكير ـ}}$

1) بين أن : $x(x+1)(x+2)(x+3)+1$ هي مربع حدودية من الدرجة الثانية ينبغي تحديدها

2) استنتج أنه إذا أضفنا 1 لجذاء أربعة أعداد صحيحة طبيعية فإننا نحصل على مربع عدد صحيح طبيعي.

الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي	الحدوديـــــــــات حل مقترح	سلسلة 1

تمرين 1 :

$$P(x)=(x+1)(x-8)+(x-3)^2$$
$$P(x)=x^2-8x+x-8+x^2-6x+9$$
$$P(x)=2x^2-13x+1$$
منه: $d°P=2$

$$Q(x)=2x^2(x+1)-(2x-1)(x^2+1)$$
$$Q(x)=2x^3+2x^2-(2x^3+2x-x^2-1)$$
$$Q(x)=2x^3+2x^2-2x^3-2x+x^2+1$$
$$Q(x)=3x^2-2x+1$$
منه: $d°Q=2$

$$H(x)=(x+2)^3+x^4-(x^2-1)^2$$
$$H(x)=x^3+6x^2+12x+8+x^4-(x^4-2x^2+1)$$
$$H(x)=x^3+6x^2+12x+8+x^4-x^4+2x^2-1$$
$$H(x)=x^3+8x^2+12x+7$$
منه: $d°H=3$

$$G(x)=x(2+5x)(x-\sqrt{2})$$
$$G(x)=(2x+5x^2)(x-\sqrt{2})$$
$$G(x)=2x^2-2\sqrt{2}\,x+5x^3-5\sqrt{2}\,x^2$$
$$G(x)=5x^3+(2-5\sqrt{2})x^2-2\sqrt{2}\,x$$
منه: $d°G=3$

انتبه وضع أقواسا قبل كل نشر مسبوق برمز-، وتذكر المتطابقات الإضافية : $(a+b)^3=a^3+3ba^2+3ab^2+b^3$ و $(a-b)^3=a^3-3ba^2+3ab^2-b^3$

تمرين 2 : a و b و c أعداد حقيقية

1

لدينا :
$$(a-3)x^2+(1-b)x+8=(x-1)^2+5(x+c)+7$$
$$(a-3)x^2+(1-b)x+8=x^2-2x+1+5x+5c+7$$
$$(a-3)x^2+(1-b)x+8=x^2+3x+(5c+8)$$

منه : $\begin{cases}a-3=1\\1-b=3\\8=5c+8\end{cases}$ منه : $\begin{cases}a=4\\-b=2\\5c=0\end{cases}$ أي : $\boxed{\begin{cases}a=4\\b=-2\\c=0\end{cases}}$

2

لدينا :
$$(x+5)(3x+4)+ax^2=3bx+5c$$
$$3x^2+4x+15x+20+ax^2=3bx+5c$$
$$(3+a)x^2+19x+20=3bx+5c$$

منه : $\begin{cases}3+a=0\\19=3b\\20=5c\end{cases}$ منه : $\boxed{\begin{cases}a=-3\\b=\dfrac{19}{3}\\c=\dfrac{20}{4}=5\end{cases}}$

3

لدينا :
$$a(x+2)^2+b(x+2)+c=2x^2+9x+10$$
$$a(x^2+4x+4)+bx+2b+c=2x^2+9x+10$$
$$ax^2+4ax+4a+bx+2b+c=2x^2+9x+10$$
$$ax^2+(4a+b)x+(4a+2b+c)=2x^2+9x+10$$

منه : $\begin{cases}a=2\\4a+b=9\\4a+2b+c=10\end{cases}$ منه : $\begin{cases}a=23\\8+b=9\\8+2b+c=10\end{cases}$ أي: $\begin{cases}a=2\\b=1\\8+2+c=10\end{cases}$ بالتالي : $\boxed{\begin{cases}a=2\\b=1\\c=0\end{cases}}$

لإيجاد الأعداد المطلوبة يكفي نشر و ترتيب الحدوديات ثم استنتاج تساوي المعاملات التي من نفس الدرجة.

تمرين 3 : $P(x)=x^3+6x^2-x-30$

1 $P(0)=0+0-0-30=-30$ ، $P(1)=1+6-1-30=-24$ ، $P(2)=8+24-2-30=0$

	$P(-1)=-1+6+1-30=-24$ ، $P(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+12-\sqrt{2}-30=\sqrt{2}-18$	
2	بما أن $P(2)=0$ فإن 2 هو جذر للحدودية $P(x)$	
3	لإيجاد الحدودية $Q(x)$ ننجز القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على $x-2$ فنجد أن : $Q(x)=x^2+8x+15$	$x^3+6x^2-x-30 \mid x-2$ $\underline{x^3-2x^2} \mid x^2+8x+15$ $0 \quad 8x^2-x$ $\underline{8x^2-16x}$ $0 \quad 15x-30$ $\underline{15x-30}$ 0
4	لدينا : $Q(-3)=9-24+15=0$ إذن -3 جذر للحدودية $Q(x)$ ننجز القسمة الإقليدية لـ $Q(x)$ على $x+3$ فنجد أن : $Q(x)=(x+3)(x+5)$	$x^2+8x+15 \mid x+3$ $\underline{x^2+3x} \mid x+5$ $5x+15$ $\underline{5x-15}$ 0
5	لدينا : $P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(x+3)(x+5)$	
6	لدينا : $P(x)=0$ $(x-2)(x+3)(x+5)=0$ يعني : $x-2=0$ أو $x+3=0$ أو $x+5=0$ أي $x=2$ أو $x=-3$ أو $x=-5$ بالتالي : $S=\{2,-3,-5\}$	

استعملنا القواعد التالية : $|x|=x$ إذا كان $x\geq 0$ و $|x|=-x$ إذا كان $x\leq 0$ و $\sqrt{x^2}=|x|$

تمرين 4 : $P(x)=4x^3-3x+1$ و $R(x)=4x^3-3x-1$

1	أ)	لدينا: $P(-1)=-4+3+1=0$ إذن -1 جذر للحدودية $P(x)$ إذن فهي تقبل القسمة على $x+1$	
	ب)	لإيجاد الحدودية $Q(x)$ ننجز القسمة الإقليدية لـ $P(x)$ على $x+1$ فنجد أن : $Q(x)=4x^2-4x+1$	$4x^3+0x^2-3x+1 \mid x+1$ $\underline{4x^3+4x^2} \mid 4x^2-4x+1$ $0 \quad -4x^2-3x$ $\underline{-4x^2-4x}$ $0 \quad x+1$ $\underline{x+1}$ 0
2		لدينا : $(x-1)(2x+1)^2=(x-1)(4x^2+4x+1)=4x^3+4x^2+x-4x^2-4x-1=4x^3-3x-1=R(x)$	
3		لدينا : $P(x)=(x+1)(4x^2-4x+1)=(x+1)(2x-1)^2$ منه: $P(x)=0$ تعني : $(x+1)(2x-1)^2=0$ أي : $x+1=0$ أو $2x-1=0$ أي : $x=-1$ أو $x=\frac{1}{2}$	لدينا : $R(x)=(x-1)(2x+1)^2$ منه: $R(x)=0$ تعني : $(x-1)(2x+1)^2=0$ أي : $x-1=0$ أو $2x+1=0$ أي : $x=1$ أو $x=-\frac{1}{2}$

	بالتالي: $\boxed{S=\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}}$	بالتالي: $\boxed{S=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}}$

لنحل في IR المتراجحة : $P(x)\geq 0$ أي : $(x+1)(2x-1)^2\geq 0$

بما أننا نعلم أن الحدودية $(2x-1)^2$ موجبة و تنعدم في $\frac{1}{2}$

فإن المتراجحة : $(x+1)(2x-1)^2\geq 0$ تعني : $x=\frac{1}{2}$ أو $(x+1)\geq 0$ أي : $x=\frac{1}{2}$ أو $x\geq -1$

بالتالي : $\boxed{S=[-1,+\infty[\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}=[-1,+\infty[}$ (لأن : $\frac{1}{2}\in[-1,+\infty[$)

4

الطريقة العامة لحل متراجحات من الدرجة الثانية فأكثر تتطلب جدول الإشارات، لكن في هذه الحالة و لكون أحد العوامل موجب فهي طريقة أسهل لكنها لن تكون مفيدة في حالات أخرى، لذلك سيتم حل المتراجحة الموالية عن طريق جدول الإشارات لاستفادة أكبر.

لنحل في IR المتراجحة : $R(x)\leq 0$ أي : $(x-1)(2x+1)^2\leq 0$، لدينا :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+
$(2x+1)^2$	+	0	+		+
$(x-1)(2x+1)^2$	-	0	-	0	+

بالتالي : $\boxed{S=]-\infty,1]}$

5

المتفاوتة $-1\leq 4x^3-3x\leq 1$ تعني : $-1\leq 4x^3-3x$ و $4x^3-3x\leq 1$ أي : $4x^3-3x+1\geq 0$ و $4x^3-3x-1\leq 0$

أي : $P(x)\geq 0$ و $R(x)\leq 0$ بالتالي : $x\in[-1,+\infty[$ و $x\in]-\infty,1]$

أي : $x\in]-\infty,1]\cap[-1,+\infty[$ أي : $x\in[-1,1]$ بالتالي : $\boxed{S=[-1,1]}$

استعملنا القواعد التالية : $|x|=x$ إذا كان $x\geq 0$ و $|x|=-x$ إذا كان $x\leq 0$ و $\sqrt{x^2}=|x|$

تمرين 5 : $P(x)=x^3-6x^2+10x-4$

1

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+10x-4 & x-2 \\ \hline \underline{x^3-2x^2} & x^2-4x+2 \\ 0\quad -4x^2+10x & \\ \underline{-4x^2+8x} & \\ 0\quad +2x-4 & \\ \underline{2x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

2 لدينا : $P(x)-2(2-x)=x^3-6x^2+10x-4-4+2x=x^3-6x^2+12x-8=(x-2)^3$

3

لنحل في IR المتراجحة : $|P(x)-2(2-x)|\leq 8\times 10^{-3}$

لدينا : $|P(x)-2(2-x)|\leq 8\times 10^{-3}$ تعني : $|(x-2)^3|\leq 2^3\times 0{,}1^3$ تعني : $|x-2|^3\leq 0{,}2^3$ تعني : $|x-2|\leq 0{,}2$

تعني أن : $-0{,}2\leq x-2\leq 0{,}2$ تعني : $-0{,}2+2\leq x\leq 0{,}2+2$ أي : $\boxed{1{,}8\leq x\leq 2{,}2}$ بالتالي : $\boxed{S=[1{,}8\ ;\ 2{,}2]}$

4

بما أن : $1{,}845\in[1{,}8\ ;\ 2{,}2]$ فإنها تحقق المتفاوتة السابقة ، منه : $|P(1{,}845)-2(2-1{,}845)|\leq 8\times 10^{-3}$

أي : $|P(1{,}845)-0{,}31|\leq 8\times 10^{-3}$ ، و هذا يعني أن $0{,}31$ هي قيمة مقربة للعدد $P(1{,}845)$ إلى 8×10^{-3}

استعملنا في السؤال 5 خاصية مقبولة: " إذا كان $a^3\leq b^3$ فإن : $a\leq b$ "

	تمرين 6 : ـ مزيدا من التفكير ـ	
1	لدينا : $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = x(x+3)(x+1)(x+2)+1 = (x^2+3x)(x^2+2x+x+2)+1$ $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = (x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1$ $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x+1)^2$	
2	حسب السؤال السابق إذا كان n عدد صحيح طبيعي فإن الأعداد التي تليه هي $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ وبذلك يكون جذاؤها بعد إضافة 1 هو $(n^2+3n+1)^2$ والذي يمثل مربع عدد صحيح طبيعي.	