

الجواب 1: $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$x_0 = 1 \text{ ومنه } f \text{ قابلة للاشتغال عند: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \\ x_0 = 2 \text{ وهو العدد المشتق عند } 2 = f'(2)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

تمرين 4: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^{10} \quad (3) \quad f(x) = 3x - 5 \quad (2) \quad f(x) = 2 \quad (1)$$

$$f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (5) \quad f(x) = 2x^5 \quad (4)$$

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 1 \quad (6)$$

$$f(x) = (3x - 5) \times (2x + 1) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{5x - 4} \quad (9) \quad f(x) = 6\sqrt{x} - 4 \quad (8)$$

$$f(x) = (2x - 1)^7 \quad (11) \quad f(x) = \frac{3x - 2}{2x - 1} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad (12)$$

الأجوبة:

$$f'(x) = (3x - 5)' = 3(2) \quad f'(x) = (2)' = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9 \quad (3)$$

$$f'(x) = (2x^5)' = 2 \times 5x^{5-1} = 10x^4 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1\right)' = 4 \times 3x^{3-1} - \frac{1}{2} \times 2x - 0 = 12x^2 - x \quad (5)$$

$$f'(x) = (3x^2 - 6x - 1)' = 3 \times 2x^{2-1} - 6 - 0 = 6x - 6 \quad (6)$$

(7) نستعمل القاعدة التالية: $(u + v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((3x - 5) \times (2x + 1))' = (3x - 5)'(2x + 1) + (3x - 5)(2x + 1)'$$

$$f'(x) = 3(2x + 1) + 2(3x - 5) = 6x + 3 + 6x - 10 = 12x - 7$$

$$f'(x) = (6\sqrt{x} - 4)' = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x} \quad (8)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad (9) \text{ نستعمل القاعدة التالية:}$$

تمرين 1: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

باستعمال التعريف أدرس اشتغال الدالة f عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1^2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x+1) = 5 \times 2 = 10$$

ومنه f قابلة للاشتغال عند :

$$x_0 = 1 \text{ وهو العدد المشتق عند } 1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10 = f'(1)$$

تمرين 2: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

باستعمال التعريف أدرس اشتغال الدالة f عند $x_0 = 3$

$$f(3) = 2 \times 3^2 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 1 - 19}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 3^2)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x+3)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} 2(x+3) = 2(3+3) = 12$$

ومنه f قابلة للاشتغال عند :

$$x_0 = 3 \text{ وهو العدد المشتق عند } 3 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 12 = f'(3)$$

تمرين 3: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

1) باستعمال التعريف أدرس اشتغال الدالة f عند $x_0 = 2$

2) حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x^2 - 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 3(x+2) = 3 \times 4 = 12$$

ومنه f قابلة للاشتغال عند :

$$x_0 = 2 \text{ وهو العدد المشتق عند } 2 = f'(2) = 12$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 12 + 12(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

$$y = 12x - 12 \Leftrightarrow y = 12 + 12x - 24 \Leftrightarrow$$

تمرين 3: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتغال عند $x_0 = 2$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

$$f'(x) = \left(\frac{3x-1}{x+2} \right)' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$ نستعمل القاعدة التالية : $f(x) = (3x+4)^3$ (11)

$$f'(x) = ((3x+4)^3)' = 3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)' = 3 \times 3 \times (3x+4)^{3-1} = 9(3x+4)^2$$

$$f'(x) = \left(\frac{-3}{x} \right)' = \left(-3 \times \frac{1}{x} \right)' = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{3}{x^2}$$
 (12)

الدالة المشتقة f'	الدالة f
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$n \in \mathbb{Z}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = k \cdot u'$	$f(x) = k \cdot u$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = nu^n \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$

تمرين 6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = 2x^3 \quad (3) \quad f(x) = 7x + 15 \quad (2) \quad f(x) = 11 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \quad (5) \quad f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{5x+7} \quad (8) \quad f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1} \quad (10) \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} \quad (9)$$

$$f(x) = (2x-1)^7 \quad (12) \quad f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (11)$$

$$f'(x) = (7x+15)' = 7 \quad (2) \quad f'(x) = (11)' = 0 \quad (1) \quad \text{الأجوبة}$$

$$f'(x) = (2x^3)' = 2 \times 3x^{3-1} = 6x^2 \quad (3)$$

$$f'(x) = \left(4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \right)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^2 - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5x-4} \right)' = -\frac{(5x-4)'}{(5x-4)^2} = -\frac{5}{(5x-4)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = \frac{3x-2}{2x-1} \quad (10)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-2}{2x-1} \right)' = \frac{(3x-2)'(2x-1) - (3x-2)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3(2x-1) - 2x(3x-2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x-3-6x+4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \quad \text{نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = (2x-1)^7 \quad (11)$$

$$f'(x) = ((2x-1)^7)' = 7 \times (2x-1)^{7-1} \times (2x-1)' = 7 \times 2 \times (2x-1)^{7-1} = 14(2x-1)^6$$

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x} \right)' = \left(5 \times \frac{1}{x} \right)' = 5 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{5}{x^2}$$
 (12)

تمرين 5: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = x^5 \quad (3) \quad f(x) = 6x + \frac{1}{2} \quad (2) \quad f(x) = 10 \quad (1)$$

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 4 \quad (5) \quad f(x) = 6x^3 \quad (4)$$

$$f(x) = (4x-1) \times (3x+5) \quad (7) \quad f(x) = x^2 - 3x + 8 \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad (9) \quad f(x) = 2\sqrt{x} + 1 \quad (8)$$

$$f(x) = (3x+4)^3 \quad (11) \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{-3}{x} \quad (12)$$

$$f'(x) = \left(6x + \frac{1}{2} \right)' = 6 \quad (2) \quad f'(x) = (10)' = 0 \quad (1) \quad \text{الأجوبة}$$

$$f'(x) = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4 \quad (3)$$

$$f'(x) = (6x^3)' = 6 \times 3x^{3-1} = 18x^2 \quad (4)$$

$$f'(x) = (5x^2 - 3x + 4)' = 5 \times 2x^{2-1} - 3 - 0 = 10x - 3 \quad (5)$$

$$f'(x) = (x^2 - 3x + 8)' = 2x^{2-1} - 3 + 0 = 2x - 3 \quad (6)$$

نستعمل القاعدة التالية : $(u+v)' = u' \times v + u \times v'$ (7)

$$f'(x) = ((4x-1) \times (3x+5))' = (4x-1)'(3x+5) + (4x-1)(3x+5)'$$

$$f'(x) = 4(3x+5) + 3(4x-1) = 12x + 20 + 12x - 3 = 24x + 17$$

$$f'(x) = (2\sqrt{x} + 1)' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \quad (8)$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية :}$$
 (9)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x+1} \right)' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (10)$$

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-3	$+\infty$

تمرين 8: حدد مطابيف الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = x^2 - 6x + 1$$

$$f'(x) = (x^2 - 6x + 1)' = 2x - 6 \quad \text{و} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$x = 3$ يعني $2x - 6 = 0$ $f'(x) = 0$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-8	$+\infty$

$f'(3) = 0$ و تتغير اشارتها اذن -8

مطابف للدالة f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محدودات

(3) أحسب مشقة الدالة f و أدرس اشارتها (4) حدد جدول تغيرات

(5) حدد معادلة لمامس منحى الدالة f في النقطة الذي أقصولها $x_0 = 1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) حدد مطابيف الدالة f ان وجدت

(8) أرسم (C_f) في معلم متعمد منظم

$$f(x) = 2x^2 + x + 1$$

الدالة f حدودية اذن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^2 + x + 1)' = 4x + 1 \quad (3)$$

$$x = -\frac{1}{4} \quad \text{يعني} \quad 4x + 1 = 0 \quad f'(x) = 0$$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x+1$	—	0	+

(4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{7}{8}$	$+\infty$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \right)' = \frac{1}{5} \times 5x^{5-1} - \frac{1}{4} \times 4x^3 - 4 + 0 = x^4 - x^3 - 4 \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x} \right)' = \left(3 \times \frac{1}{x} \right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{-3}{x^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad (7)$$

نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$ (8)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{5x+7} \right)' = \frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2} = \frac{5}{(5x+7)^2}$$

$$\left(\sqrt{u} \right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 8x} \quad (9)$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 8x})' = \frac{(x^2 + 8x)'}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{2x + 8}{2\sqrt{x^2 + 8x}} = \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + 8x}}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = \frac{7x}{x^3 + 1} \quad (10)$$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3 + 1} \right)' = \frac{(7x)'(x^3 + 1) - 7x(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7(x^3 + 1) - 7x \times 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3 + 1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3 + 1)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad f(x) = \frac{4x - 3}{2x - 1} \quad (11)$$

$$f'(x) = \left(\frac{4x - 3}{2x - 1} \right)' = \frac{(4x - 3)'(2x - 1) - (4x - 3)(2x - 1)'}{(2x - 1)^2} = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x - 1) - 2 \times (4x - 3)}{(2x - 1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2}{(2x - 1)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \quad f(x) = (2x - 1)^7 \quad (12)$$

$$f'(x) = ((2x - 1)^7)' = 7 \times (2x - 1)^{7-1} \times (2x - 1)' = 14(2x - 1)^6$$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محدودات

(3) أدرس تغيرات (4) حدد جدول تغيرات

الأجوبة : (1) الدالة f حدودية اذن

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 2x - 2)' = 2x + 2 \quad (3)$$

$$x = -1 \quad \text{يعني} \quad 2x + 2 = 0 \quad f'(x) = 0$$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x + 2$	—	0	+

اذا كانت: $f'(x) \geq 0$ فان: $x \in [-1; +\infty]$ منه f تزايدية

اذا كانت: $f'(x) \leq 0$ فان: $x \in]-\infty; -1]$ منه f تنقصصية

7) حدد مطابيق الدالة f ان وجدت
أرسم (C_f) في معلم متعدد منظم

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

$$y = 5x - 21 \Leftrightarrow y = 4 + 5(x - 5) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

لأن : $f(1) = 4$ و $f'(1) = 5$

6) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحني الممثل للدالة f مع محور الأفاسيل

نحل فقط المعادلة : $2x^2 + x + 1 = 0$ يعني $f(x) = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$c = 1 \text{ و } b = 1 \text{ و } a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتالي التمثيل المباني لا يقطع محور الأفاسيل

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحني الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

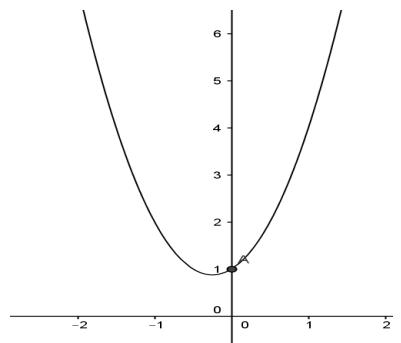
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0) = 1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0; 1)$

7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

أرسم: C_f (8)

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



ملاحظة: بالنسبة لـ $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ وتحديد نقط التقاطع

مع محور الأفاسيل نحل المعادلة : $f(x) = 0$ يعني

$$-x^2 + 2x + 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$c = 3 \text{ و } b = 2 \text{ و } a = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(2) + \sqrt{16}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هما: $B(3; 0)$ أو $A(-1; 0)$

تمرين 10: للبحث نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x) = -x^2 + x \quad \text{أو} \quad f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند حدات

(3) أحسب مشقة الدالة f و أدرس اشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحني الدالة f في النقطة الذي أقصولها $x_0 = 1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

