الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي	الإسقـــاط ـ مبرهنة طاليس	

تمرين 1 : $ABCD$ مستطيل ، I منتصف $[AB]$ ، $[IC]$ و $[BD]$ تتقاطعان في النقطة M

1) بين أن : $\overrightarrow{MB}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{MD}$

2) استنتج أن : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

تمرين 2 : $ABCD$ متوازي أضلاع.

لتكن E بحيث $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ، الموازي لـ (BD) و المار من E يقطع (DC) في F .

المستقيم (AE) يقطع (DC) في M و المستقيم (AF) يقطع (BC) في N .

1) بين أن : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ و أن : $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ و أن : $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$

2) استنتج أن : $(EF)//(MN)$

تمرين 3 : $ABCD$ رباعي محدب و M نقطة تقاطع قطريه .

من M نرسم الموازي لـ (BC) الذي يقطع (AB) في E و الموازي لـ (CD) الذي يقطع (AD) في F

- أثبت أن $(EF)//(BD)$

تمرين 4 : ABC مثلث ، لتكن D نقطة بحيث : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ، ولتكن E مماثلة A بالنسبة لـ B ،

(ED) و (BC) يتقاطعان في O .

1) لتكن K منتصف $[AD]$ ، بين أن $(KB)//(OD)$

2) برهن أن O منتصف $[BC]$

تمرين 5 : ABC مثلث ، D و M و N ثلاث نقط حيث : $\overrightarrow{DB}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}$ و $4\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

1) أنشئ الشكل

2) بين أن : $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ و أن : $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3) بين أن النقط A و C و N مستقيمية

4) نعتبر E نقطة من القطعة $[AB]$ مخالفة لـــ A و B ، لتكن I مسقط E على (BD) بتواز مع (AD) و J مسقط E على (BN) بتواز مع (AN)

- أثبت أن $(IJ)//(DN)$

تمرين 6 : ليكن ABC ، و I منتصف $[BC]$ ، M نقطة من القطعة $[AI]$ مخالفة لــ A و B

(MC) و (AB) يتقاطعان في E ، (MB) و (AC) يتقاطعان في F

1) أنشئ الشكل

2) لتكن K مماثلة M بالنسبة لـ I ، حدد طبيعة الرباعي $CMBK$ ثم استنتج أن : $(EF)//(BC)$

تمرين 7 : ـ مزيدا من التفكير ـ

$ABCD$ شبه منحرف ($(AB)//(CD)$ و $AB<CD$)

(AD) و (BC) يتقاطعان في E ، (AC) و (BD) يتقاطعان في F ، (EF) يقطع $[AB]$ في I و $[DC]$ في J .

- بين أن I منتصف $[AB]$ و أن J منتصف $[DC]$

	الإسقـــاط ـ مبرهنة طاليس حلول مقترحة	الجذع المشترك العلمي و التكنلوجي

تمرين 1 : $ABCD$ مستطيل ، I منتصف $[AB]$، $[IC]$ و $[BD]$ تتقاطعان في النقطة M

1

لدينا في المثلث MDC :

- ➢ $B \in (MD)$ و $I \in (MC)$
- ➢ $(IB)//(DC)$ (لأن $ABCD$ مستطيل)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

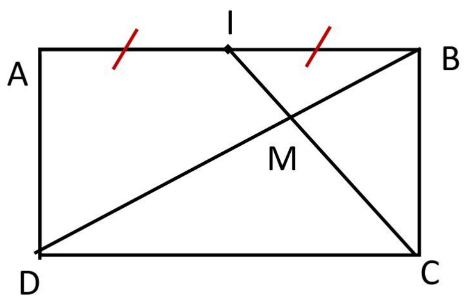
$$\frac{MB}{MD} = \frac{MI}{MC} = \frac{IB}{DC}$$

وبما أن : I منتصف $[AB]$، فإن : $\frac{IB}{DC} = \frac{1}{2}$

منه : $\frac{MB}{MD} = \frac{1}{2}$ أي $MB = \frac{1}{2} MD$

وبما أن المتجهتان $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MD}$ مستتقيميتان ولهما منحيان

متعاكسان فإن : $\overrightarrow{MB} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{MD}$



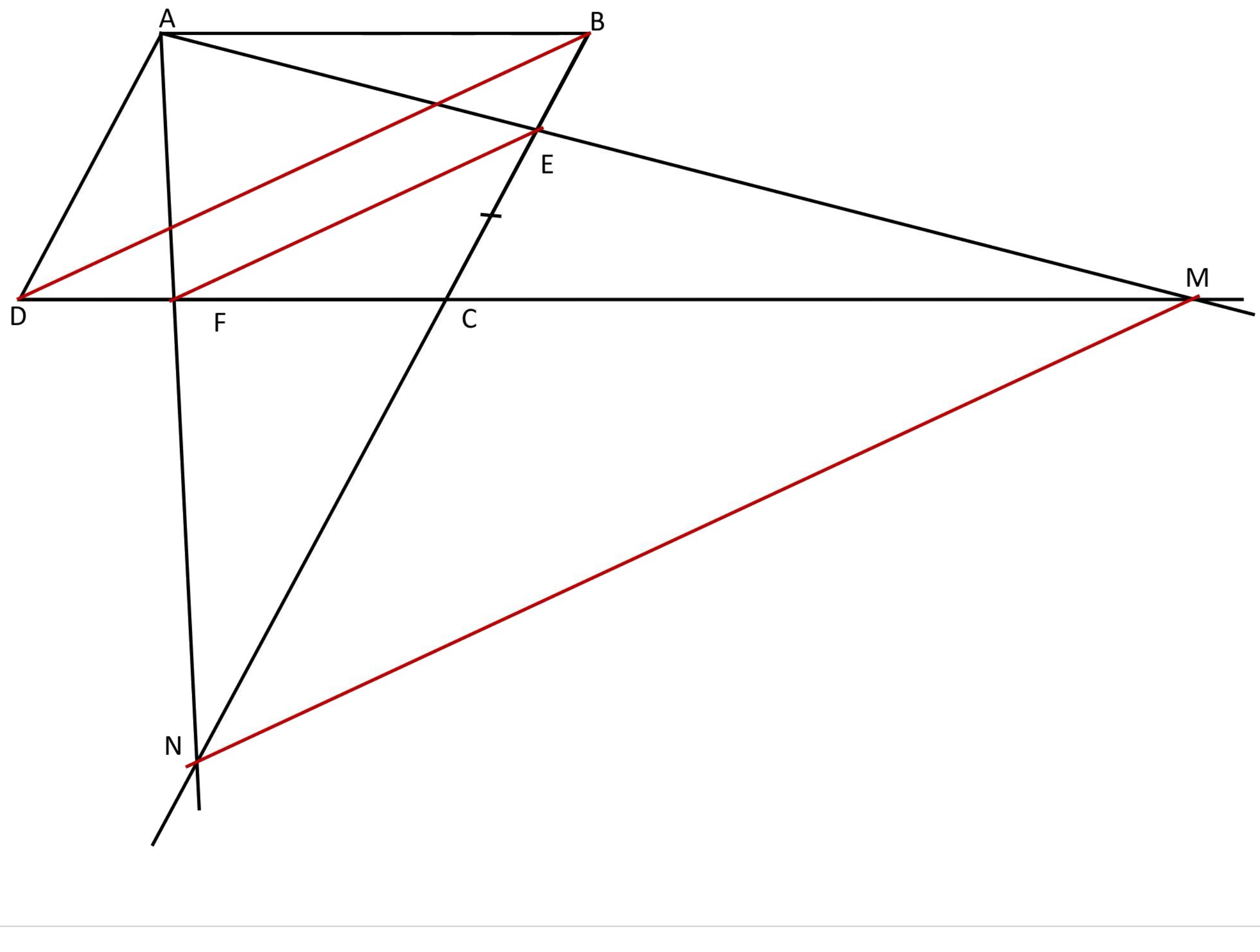
2

لدينا : $\overrightarrow{MB} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{MD}$ منه : $\overrightarrow{MB} = \frac{-1}{2}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD}\right)$ أي : $\overrightarrow{MB} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{MB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ أي : $\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

أي $\left(1 + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ أي $\frac{3}{2}\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ منه : $3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DB}$ بالتالي : $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

لإثبات استقامية متجهتين نبين أن إحداهما تساوي جداء الأخرى في عدد حقيقي

تمرين 2 : $ABCD$ متوازي أضلاع.



لدينا في المثلث EMC :

➢ $C\in(BE)$ و $M\in(AE)$

➢ $(MC)//(AB)$ (لأن $ABCD$ متوازي أضلاع)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $\frac{AE}{AM}=\frac{BE}{BC}$ وبما أن : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ فإن $\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}$

إذن $\frac{AE}{AM}=\frac{1}{3}$ ، وبما أن المتجهتان $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AM}$ مستقيميتان و لهما نفس المنحى فإن : $\boxed{\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}}$

1

لدينا في المثلث BCD :

➢ $F\in(DC)$ و $E\in(BC)$

➢ $(EF)//(DB)$ (معطيات)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $\frac{DF}{DC}=\frac{BE}{BC}$ وبما أن : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ فإن $\frac{BE}{BC}=\frac{1}{3}$

إذن $\frac{DF}{DC}=\frac{1}{3}$ ، وبما أن المتجهتان $\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{DC}$ مستقيميتان و لهما نفس المنحى فإن : $\boxed{\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}}$

لدينا في المثلث ADF :

➢ $N\in(AF)$ و $C\in(DF)$

➢ $(NC)//(AD)$ (لأن $ABCD$ متوازي أضلاع)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن : $\frac{AF}{AN}=\frac{DF}{DC}$ وبما أن : $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ فإن $\frac{DF}{DC}=\frac{1}{3}$

إذن $\frac{AF}{AN}=\frac{1}{3}$ ، وبما أن المتجهتان $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AN}$ مستقيميتان و لهما نفس المنحى فإن : $\boxed{\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}}$

2

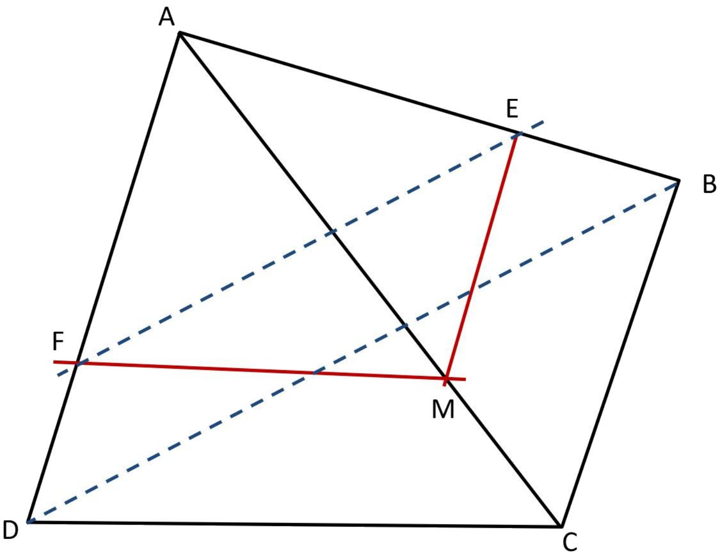
لنبين أن : $(EF)//(MN)$

لدينا $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$ إذن : $\boxed{\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}}$

بالتالي المتجهتان $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{MN}$ مستقيميتان أي أن $(EF)//(MN)$

الرمز ➢ في كل السلسلة للإشارة إلى شروط تطبيق مبرهنة طاليس المباشرة أو العكسية.

تمرين 3 : $ABCD$ رباعي محدب و M نقطة تقاطع قطريه .



لدينا في المثلث ABC :

➢ $E\in(AB)$ و $M\in(AC)$

➢ $(EM)//(BC)$ (معطيات)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{BM}{AC} \qquad (1)$$

لدينا في المثلث ADC :

➢ $F\in(AD)$ و $M\in(AC)$

➢ $(FM)//(DC)$ (معطيات)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

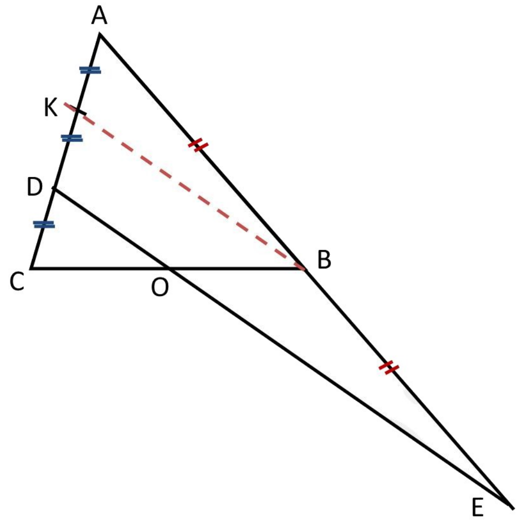
$$\frac{AF}{AD}=\frac{BM}{AC} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}$ ، لدينا الآن ، في المثلث ABD :

- $F\in(AD)$ و $E\in(AB)$
- للنقط A و E و B نفس ترتيب A و F و D
- $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}$ (حسب الاستنتاج السابق)

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن : $(EF)//(BD)$

تمرين 4 :

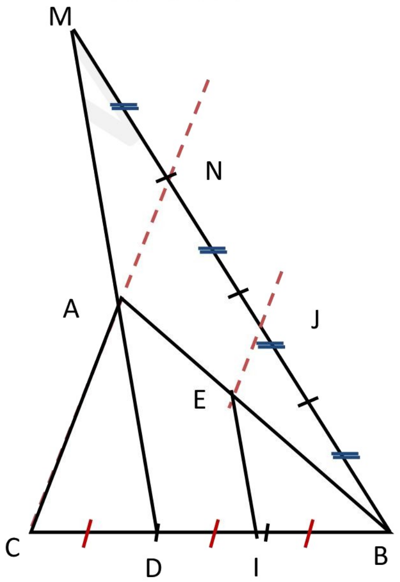


لنبين أن $(KB)//(OD)$ ، في المثلث ADE لدينا B منتصف $[AE]$ و K منتصف $[AD]$
إذن $(KB)//(DE)$ (خاصية المستقيم المار بمنتصفي ضلعي مثلث)
و بما أن $O\in(DE)$ فإن : $(KB)//(OD)$
	1

لنبرهن أن O منتصف $[BC]$ ، بما أن $(KB)//(OD)$ فإنه يمكن اعتبار الاسقاط على (BC) بتواز مع المستقيم (KB) باعتبار هذا الاسقاط لدينا : مسقط K هي B و مسقط D هي O ومسقط C هي C إذن مسقط القطعة $[CK]$ هي القطعة $[CB]$ و بما أن $[CK]$ منتصفها هو D و لأن الاسقاط يحافظ على منتصف قطعة فإن $[CB]$ منتصفها هو O	2

السؤال الثاني يمكن الإجابة عنه باستعمال خاصية « المستقيم المار بمنتصف ضلع مثلث و الموازي للضلع الثاني سيمر بمنتصف الضلع الثالث » ، لكننا فضلنا طريقة تستغل خصائص الاسقاط

تمرين 5 : ABC مثلث ، $\overrightarrow{DB}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}$ و $4\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$



المتساوية $\overrightarrow{DB}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{BC}$ تعني : $\boxed{\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}}$

و المتساوية $4\overrightarrow{BN}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ تعني : $4\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{BM}$

1 أي : $\boxed{\overrightarrow{BN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}}$

في هذا السؤال يجب تغيير المتساويات المتجهية لكي نحصل على متساويات أكثر تبسيطا حتى نتمكن من إنشاء الشكل.

لنبين أن $\overrightarrow{MB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=$$

$$\overrightarrow{MB}=-2\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}$$

لدينا : $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{MB}=\left(2-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

2 لنبين أن $\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{NB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}\right)=\frac{3}{4}\left(2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)=\frac{3}{4}\left(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}\right)$$

لدينا : $\overrightarrow{NB}=\frac{3}{4}\left(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BD}\right)=\frac{3}{4}\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{3}{4}\left(2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{6}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{6}{12}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{NB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

يتطلب الإجابة عن هذين السؤالين بحثا و محاولة تفكيك المتجهات باستعمال علاقة شال ، الإشكال يكمن في النقطة التي يجب استعمالها لكي نستطيع استعمال المعطيات و الوصول للنتيجة المطلوبة، ورغم أنه يبدو معقدا لكثرة المتساويات فلأننا حاولنا الشرح أكثر ما يمكن.

3 لنبين أن : النقط A و C و N مستقيمية

لدينا : $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$

بالتالي النقط A و C و N مستقيمية

4 لدينا في المثلث ADB :

- $E\in(AB)$ و $I\in(DB)$
- $(EI)//(AD)$ (معطيات)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{BE}{BA}=\frac{BI}{BD}\quad(1)$$

لدينا في المثلث ABN :

- $E\in(AB)$ و $J\in(BN)$
- $(EJ)//(AN)$ (معطيات)

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{BE}{BA}=\frac{BJ}{BN}\quad(2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{BI}{BD}=\frac{BJ}{BN}$ ، لدينا الآن : في المثلث BDN :

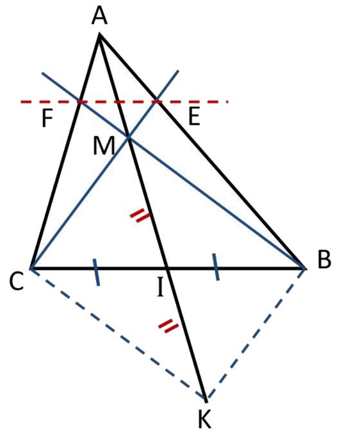
- $J\in(BN)$ و $I\in(DB)$
- للنقط B و J و N نفس ترتيب B و I و D
- $\frac{BI}{BD}=\frac{BJ}{BN}$ (حسب الاستنتاج السابق)

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن : $(IJ)//(DN)$

تمرين نموذجي اخترناه من الكتاب المدرسي يوضح كيف يمكن توظيف مفهومي الإسقاط و المتجهات و مبرهنة طاليس.

تمرين 6 :

1



2

لدينا K مماثلة M بالنسبة لـ I

إذن للقطعتين $[MK]$ و $[BC]$ نفس المنتصف منه $CMBK$ متوازي الأضلاع

إذن : $(ME)//(BK)$ و $(MF)//(CK)$

لدينا في المثلث ABK :

➢ $M\in(AK)$ و $E\in(AB)$

➢ $(ME)//(BK)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{AM}{AK} \qquad (1)$$

لدينا في المثلث ACK :

➢ $M\in(AK)$ و $F\in(AC)$

➢ $(MF)//(CK)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{AF}{AC}=\frac{AM}{AK} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$ ، لدينا الآن ، في المثلث ABC :

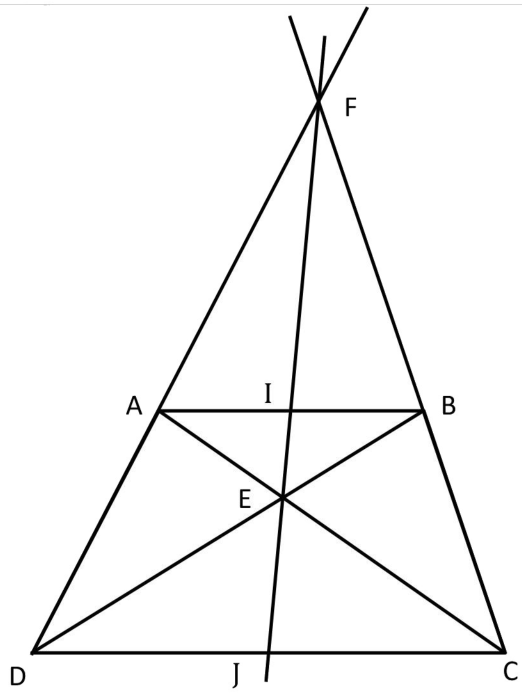
➢ $F\in(AC)$ و $E\in(AB)$

➢ للنقط A و E و B نفس ترتيب A و F و C

➢ $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$ (حسب الاستنتاج السابق)

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن : $(EF)//(BC)$

تمرين 7 : ـ مزيدا من التفكير ـ



لدينا في المثلث FDJ :

- $I\in(FJ)$ و $A\in(DF)$
- $(AI)//(DJ)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{FA}{FD}=\frac{FI}{FJ}=\frac{AI}{DJ} \quad (1)$$

لدينا في المثلث AIE :

- $C\in(AE)$ و $J\in(EI)$
- $(JC)//(AI)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{EI}{EJ}=\frac{EA}{EC}=\frac{IA}{JC} \quad (2)$$

لدينا في المثلث FDC :

- $B\in(FC)$ و $A\in(DF)$
- $(AB)//(DC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{FA}{FD}=\frac{FB}{FC}=\frac{AB}{DC} \quad (3)$$

لدينا في المثلث ABE :

- $C\in(AE)$ و $D\in(EB)$
- $(AB)//(DC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$\frac{EA}{EC}=\frac{EB}{ED}=\frac{AB}{CD} \quad (4)$$

من (1) و (3) نستنتج أن : $\frac{AB}{DC}=\frac{AI}{DJ}$ $(*)$ و من (2) و (4) نستنتج أن : $\frac{AB}{CD}=\frac{IA}{JC}$ $(**)$

إذن من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $\frac{AI}{JC}=\frac{AI}{DJ}$ منه : $\boxed{DJ=JC}$ بالتالي : J منتصف $[DC]$

من $(**)$ نستنتج أن : $\frac{DJ}{DC}=\frac{AI}{AB}$ وحيث أن J منتصف $[DC]$ فإن : $\frac{DJ}{DC}=\frac{1}{2}$

منه : $\boxed{\frac{AI}{AB}=\frac{1}{2}}$ بالتالي I منتصف $[AB]$

خلال كل السلسلة قد تلاحظ أن استعمال مبرهنة طاليس يطغى على استعمال خاصية حفاظ الإسقاط على استقامية متجهتين لأن هذه الأخيرة هي مجرد نتيجة لخاصية طاليس، إذ يمكن القول أنها مظهر آخر لمبرهنة طاليس ليس إلا.