

تمارين : مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية و مبادئ في الحسابيات

تمرين 1

- 1- حدد مضاعفات العدد 14 الأصغر من 200
- 2- حدد قواسم العدد 1470
- 3- حدد المضاعفات المشتركة للعددين a و b في الحالات التالية:
أ- $a=37$ و $b=79$ ب- $a=65$ و $b=42$ ج- $a=70$ و $b=14$ و $a=46$ و $b=76$
- 4- حدد القواسم للمشتركة للعددين a و b في الحالات التالية:
أ- $a=54$ و $b=42$ ب- $a=336$ و $b=80$ ج- $a=72$ و $b=35$ و $a=83$ و $b=67$

تمرين 2

- 1- هل الأعداد التالية أولية 49 ، 239 ، 407 ، 387 ، 1559 ، 8367
- 2- فكك الأعداد التالية إلى جداء عوامل أولية 675 ، 1650 ، 5292 ، 6250

تمرين 3

- 1- حدد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b في الحالات التالية:
أ- $a=27$ و $b=42$ ب- $a=19$ و $b=37$ ج- $a=72$ و $b=35$
- 2- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b في الحالات التالية:
أ- $a=81$ و $b=126$ ب- $a=19$ و $b=37$ ج- $a=72$ و $b=35$

تمرين 4

- في الحالات التالية حدد الأرقام a, b, c علما أن:
- 1- العدد $23a4$ يقبل القسمة على 3
 - 2- العدد $23a4$ يقبل القسمة على 3 و لا يقبل القسمة على 9
 - 3- العدد $23b5c$ يقبل القسمة على 3 و على 5

تمرين 5

- ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $PGCD(m;n)=24$ و $n \leq m$
- 1- ما هي العوامل الأولية المشتركة للعددين m و n
 - 2- إذا علمت أن $m.n=3456$ فاحسب $PPCM(m;n)$ ثم استنتج m و n

تمرين 6

- نعتبر العدد $a=2^3 \times 3^2 \times 7$
- 1- تأكد أن العدد a يقبل 24 قاسم
 - 2- حدد أصغر عدد صحيح طبيعي k حيث ka مربع كامل (أي مربع عدد صحيح طبيعي)
 - 3- حدد أصغر عدد صحيح طبيعي m حيث ma مكعب لعدد صحيح طبيعي

تمرين 7

- 1- بين أن مجموع خمسة أعداد صحيحة طبيعية متتالية هو عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على 5
- 2- ليكن a عدد صحيح طبيعي
بين أن $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ مربع كامل

تمرين 8

- 1- أنشر $(n+1)^2 - n^2$
- 2- استنتج أن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين.
- 3- طبق الاستنتاج السابق على الأعداد 17 ، 45 ، 101

تمرين 9

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

أدرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2+4n+1$ و $3n^2+n$

تمرين 10

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين حيث $m > n$

1- بين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

2- حل المعادلة $m^2 - n^2 = 196$

تمرين 11

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا

1- تأكد أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2- بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

تمرين 12

ليكن n و m و k أعداد صحيحة طبيعية

بين أنه إذا كان $3n+2m$ و $7n+5m$ مضاعفين للعدد k فإن n و m مضاعفين للعدد k .

تمرين 13

1- أنشر $(10^6 - 1)^3$

2 - استنتج باقي القسمة للعدد 999999^3 على 5

تمرين 14

1- حل المعادلة $(x+1)(y+6)=35$ $(x; y) \in \mathbb{N}^2$

2- حدد x و y من \mathbb{N} حيث $x+y=504$ و $PGCD(x; y)=24$

3- حدد الأرقام x و y بحيث العدد الصحيح الطبيعي $11x1y$ قابل للقسمة على 28

تمرين 15

ليكن n و k من \mathbb{N}

1- تأكد إذا كانت $n=5k+1$ أو $n=5k+4$ فإن $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 5

تأكد إذا كانت $n=5k+2$ أو $n=5k+3$ فإن $n^2 + 1$ يقبل القسمة على 5

2- بين أنه مهما كان n من \mathbb{N} فإن العدد $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5

حلول

تمرين 1

1- مضاعفات العدد 14 الأصغر من 200 هي 0 ، 14 ، 28 ، 42 ، 56 ، 70 ، 84 ، 98 ، 112 ، 126 ، 140 ، 154 ، 168 ، 182 ، 196 .

2- قواسم العدد 1470 هي 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 10 ، 14 ، 15 ، 21 ، 30 ، 35 ، 42 ، 49 ، 70 ، 98 ، 105 ، 147 ، 210 ، 245 ، 294 ، 490 ، 735 ، 1470 .

3- أ- المضاعفات المشتركة للعددين $a=37$ و $b=79$ هي مضاعفات العدد 37×79

ب- $a=65=5 \times 13$ و $b=42=2 \times 3 \times 7$

المضاعفات المشتركة للعددين 65 و 42 هي مضاعفات 65×42

ج- $a=70=2 \times 5 \times 7$ و $b=14=2 \times 7$ هي مضاعفات 14×5

د- $a=46=2 \times 23$ و $b=76=2^2 \times 19$ هي مضاعفات العدد $2^2 \times 19 \times 23$

4- أ- $a=54=2 \times 3^2$ و $b=42=2 \times 3 \times 7$

القواسم المشتركة للعددين 54 و 42 هي 1 ، 2 ، 3 ، 6

ب- $a=336=2^4 \times 3 \times 7$ و $b=80=2^4 \times 5$

القواسم المشتركة للعددين 336 و 80 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، 16

ج- $a=72=2^3 \times 3^2$ و $b=35=5 \times 7$

القاسم المشترك الوحيد للعددين 72 و 35 هو 1

د- $a=83$ و $b=67$ عددان أوليان

القاسم المشترك الوحيد للعددين 83 و 67 هو 1

تمرين 2

1- 49 عدد غير أولي لانه يقبل القسمة على 7

لدينا الاعداد الأولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 لا تقسم العدد 239 و $17^2 < 239 < 23^2$
إذن العدد 239 أولي

.....
.....

2- التفكير إلى جداء عوامل أولية

$6250=2 \times 5^5$ ، $5292=2^2 \times 3^2 \times 7^2$ ، $1650=2 \times 3 \times 5^2 \times 11$ ، $675=3^3 \times 5^2$

تمرين 3

1- أ- $a=27=3^3$ و $b=42=2 \times 3 \times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو $2 \times 3^3 \times 7 = 378$

ب- $a=19$ و $b=37$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو $19 \times 37 = 676$

ج- $a=72=2^3 \times 9^2$ و $b=35=5 \times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو $35 \times 72 = 2520$

2- أ- $a=81=3^4$ و $b=126=2 \times 3^2 \times 7$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو $3^2 = 9$

ب- $a=19$ و $b=37$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 1

ج- $a=72=2^3 \times 3^2$ و $b=35=7 \times 5$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 1

تمرين 4

نحدد الأرقام a, b, c

1- العدد $23a4$ يقبل القسمة على 3 يعني أن $0 \leq a \leq 9$ و $a+9$ يقبل القسمة على 3

ومنه $a=0$ أو $a=3$ أو $a=6$ أو $a=9$

2- العدد $23a4$ يقبل القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9 يعني أن $0 \leq a \leq 9$ و $a+9$ يقبل

القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9 ومنه $a=3$ أو $a=6$

3- العدد $23b5c$ يقبل القسمة على 3 و على 5 يعني $0 \leq b \leq 9$ و $c \in \{0;5\}$ و $10+b+c$ تقبل القسمة

على 3

- إذا كان $c=0$ فإن

$0 \leq b \leq 9$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3 تعني $b=2$ أو $b=5$ أو $b=8$

- إذا كان $c=5$ فإن

$0 \leq b \leq 9$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3 تعني $b=0$ أو $b=3$ أو $b=6$ أو $b=9$

تمرين 5

ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين حيث $PGCD(m;n)=24$ و $n \leq m$

$$1- PGCD(m;n)=24=2^3 \times 3$$

العوامل الأولية المشتركة للعددين m و n هي 2 و 3

2- لدينا $m.n=3456$

$$PGCD(m;n)=24 \text{ و } m.n=PGCD(m;n) \times PPCM(m;n)$$

$$\text{ومنه } PPCM(m;n)=\frac{3456}{24}=144=2^4 \times 3^2$$

وحيث أن $n \leq m$ فإن

$$(n=2^3 \times 3=24 \text{ و } m=2^3 \times 3 \times 3 \times 2=144) \text{ أو } (n=2^3 \times 3 \times 2=48 \text{ و } m=2^3 \times 3 \times 3=72)$$

تمرين 6

$$a=2^3 \times 3^2 \times 7$$

1- نتأكد أن العدد a يقبل 24 قاسم

$$a=2^3 \times 3^2 \times 7=24 \times (3 \times 7) \text{ إذن العدد } a \text{ يقبل 24 قاسم}$$

2- نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي k حيث ka مربع كامل (أي مربع عدد صحيح طبيعي)

$$\text{لدينا } a=2^3 \times 3^2 \times 7 \text{ ومنه } a=2^3 \times 3^2 \times 7^2=(2^2 \times 3 \times 7)^2 \text{ ومنه } k=14$$

3- نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي m حيث ma مكعب لعدد صحيح طبيعي

$$\text{لدينا } a=2^3 \times 3^2 \times 7 \text{ ومنه } a=2^3 \times 3^3 \times 7^3=(2 \times 3 \times 7)^3 \text{ ومنه } k=147$$

تمرين 7

1- نبين أن مجموع خمسة أعداد صحيحة طبيعية متتالية هو عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على 5

ليكن a عدد صحيح طبيعي

$$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)=5a+10=5(a+2)$$

وحيث أن $(a+2) \in \mathbb{N}$ فإن $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)$ يقبل القسمة على 5

2- ليكن a عدد صحيح طبيعي

نبين أن $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ مربع كامل

$$\begin{aligned} a(a+1)(a+2)(a+3)+1 &= (a^2+a)(a^2+5a+6)+1 \\ &= a^4+6a^3+11a^2+6a+1 \\ &= a^4+6a^3+2a^2+9a^2+6a+1 \\ &= a^4+2a^2(3a+1)+(3a+1)^2 \\ &= (a^2+3a+1)^2 \end{aligned}$$

إذن $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ مربع كامل

تمرين 8

1- ننشر $(n+1)^2 - n^2$

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

2- نستنتج أن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين.

لدينا $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ مهما كانت n من \mathbb{N}

إذن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين

3- طبق الاستنتاج السابق على الأعداد 17 ، 45 ، 101

$$101 = 2 \times 50 + 1 = 51^2 - 50^2 \quad ; \quad 45 = 2 \times 22 + 1 = 23^2 - 22^2 \quad ; \quad 17 = 2 \times 8 + 1 = 9^2 - 8^2$$

تمرين 9

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

ندرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2+4n+1$ و $3n^2+n$

1- * n و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيان متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي

و التالي جداؤهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي

* لدينا $n+(n+1)+(n+2) = 3(n+1)$ و التالي زوجية $n+(n+1)+(n+2)$ هي زوجية $n+1$

إذا كان n زوجيا فان $n+(n+1)+(n+2)$ فرديا

إذا كان n فرديا فان $n+(n+1)+(n+2)$ زوجيا

* لدينا $4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$ و حيث أن $(2n^2+2n) \in \mathbb{N}$ فان $4n^2+4n+1$ زوجي

* لدينا $3n^2+n = n(n+3)$

n و $n+3$ ليس لهما نفس الزوجية أي احدهما فردي و الآخر زوجي أي اذا كان n زوجي فان

$n+3$ فردي و العكس صحيح

ومنه $n(n+3)$ عدد زوجي إذن $3n^2+n$ زوجي

تمرين 10

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m > n$

1- نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا

* إذا كان $(m-n)$ زوجيا فانه يوجد k من \mathbb{N} حيث $m-n=2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة

نحصل على $m+n=2k+2n=2(k+n)$ وحيث أن $k+n \in \mathbb{N}$ فان $m+n$ زوجي

* إذا كان $(m-n)$ فرديا فانه يوجد k من \mathbb{N} حيث $m-n=2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة

نحصل على $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$ وحيث أن $k+n \in \mathbb{N}$ فان $m+n$ فرديا

إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

$$2- \text{ نحل المعادلة } m^2 - n^2 = 196 \\ m^2 - n^2 = 196 \text{ تكافئ } (m-n)(m+n) = 2^2 \times 7^2$$

و حيث 196 زوجي فان $m+n$ و $m-n$ زوجيان

$$\text{ومنه } \begin{cases} m-n=2 \\ m+n=98 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m-n=14 \\ m+n=14 \end{cases} \\ \text{إذن } \begin{cases} m=50 \\ n=48 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} m=14 \\ n=0 \end{cases}$$

تمرين 11

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا

1- تأكد أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2- بين أن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من \mathbb{N} حيث $n = 2k + 1$

$$\text{لدينا } n^2 - 1 = (n-1)(n+1) \text{ ومنه } n^2 - 1 = 4k(k+1)$$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد k' من \mathbb{N} حيث $k(k+1) = 2k'$ و بالتالي $n^2 - 1 = 8k'$

إذن $n^2 - 1$ مضاعف للعدد 8

تمرين 12

ليكن n و m و k أعداد صحيحة طبيعية

بين أنه إذا كان $3n+2m$ و $7n+5m$ مضاعفين للعدد k فان n و m مضاعفين للعدد k .

$$\begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ ومنه يوجد عددين صحيحين طبيعيين } a \text{ و } b \text{ حيث} \\ 5 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ و } 7 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ ومنه} \\ 2 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases} \text{ و } 3 \times \begin{cases} 3n+2m = ak \\ 7n+5m = bk \end{cases}$$

$$\text{أي } \begin{cases} 21n+14m = 7ak \\ 21n+15m = 3bk \end{cases} \text{ و}$$

$$\text{ومنه } (21n+15m) - (21n+14m) = 3bk - 7ak \text{ و } (15n+10m) - (14n+10m) = 5ak - 2bk$$

$$\text{و بالتالي } m = (3b - 7a)k \text{ و } n = (5a - 2b)k$$

إذن n و m مضاعفين للعدد k .

تمرين 13

$$1- \text{ نشر } (10^6 - 1)^3$$

$$(10^6 - 1)^3 = 10^{18} - 3 \times 10^{12} + 3 \times 10^6 - 1$$

2 - نستنتج باقي القسمة للعدد 999999³ على 5

$$999999^3 = (10^6 - 1)^3 = 10^{18} - 3 \times 10^{12} + 3 \times 10^6 - 1$$

$$= 10^{18} - 3 \times 10^{12} + 3 \times 10^6 - 5 + 4$$

$$= 5(2 \times 10^{17} - 3 \times 5 \times 10^{11} + 3 \times 2 \times 10^5 - 1) + 4$$

وحيث أن $(-1 + 3 \times 2 \times 10^5 + 3 \times 5 \times 10^{11} - 2 \times 10^{17}) \in \mathbb{N}$ فإن باقي القسمة للعدد 999999^3 على 5 هو 4

تمرين 14

$$-1 \text{ نحل المعادلة } (x+1)(y+6)=35 \quad (x; y) \in \mathbb{N}^2$$

ليكن $(x; y) \in \mathbb{N}^2$

$(x+1)(y+6)=35$ ومنه $x+1$ و $y+6$ يقسمان العدد 35 و $1 \leq x+1 \leq 35$ و $6 \leq y+6 \leq 35$ أي $x+1$ و $y+6$ يقسمان العدد 35 و $0 \leq x \leq 34$ و $0 \leq y \leq 29$ و حيث أن قواسم 35 هم 1 و 5 و 7 و 35 فإن

$$\begin{cases} x+1=1 \\ y+6=35 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x+1=5 \\ y+6=7 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x=0 \\ y=29 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$$

-2 نحدد x و y من \mathbb{N} حيث $x+y=504$ و $PGCD(x; y)=24$

لدينا $PGCD(x; y)=24$ و منه يوجد عدنان صحيحان طبيعيان غير منعدمين a و b حيث $x=24a$

$$\text{و } y=24b \text{ حيث } PGCD(a; b)=1$$

و حيث أن $x+y=504$ فإن $24a+24b=504$ و منه $a+b=21$

$$\text{و بالتالي } \begin{cases} a=1 \\ b=20 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a=2 \\ b=19 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a=4 \\ b=17 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a=5 \\ b=16 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a=8 \\ b=13 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a=10 \\ b=11 \end{cases}$$

و نحصل على نتائج الأخرى بإعطاء قيم a للعدد b و العكس لان a و b يلعبان دوران متماثلان . و بالتعويض في $x=24a$ و $y=24b$ نحصل على نتائج.....

-3 نحدد الأرقام x و y بحيث العدد الصحيح الطبيعي $11x1y$ قابل للقسمة على 28

العدد $11x1y$ قابل للقسمة على 28 و منه $11x1y$ قابل للقسمة على 4 و 7

و منه $1y$ قابل للقسمة على 4 و بالتالي $y=2$ أو $y=6$

$$* \text{ إذا كان } y=2 \text{ فإن } 11x12=11012+x \times 10^2=7 \times 1573+1+x \times 10^2$$

وحيث $11x12$ قابل للقسمة على 7 فإن $\overline{x01} = x \times 10^2 + 1$ يقبل القسمة على 7 و منه $x=3$

$$* \text{ إذا كان } y=6 \text{ فإن } 11x62=11016+x \times 10^2=7 \times 1573+5+x \times 10^2$$

وحيث $11x16$ قابل للقسمة على 7 فإن $\overline{x05} = x \times 10^2 + 5$ يقبل القسمة على 7 و منه $x=3$ أو $x=8$

$$\text{إذن } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$$

تمرين 15

ليكن n و k من \mathbb{N}

-1 نتأكد إذا كانت $n=5k+1$ أو $n=5k+4$ فإن n^2-1 يقبل القسمة على 5

$$\text{إذا كان } n=5k+1 \text{ فإن } n^2-1=25k^2+10k=5(5k^2+2k)$$

و منه n^2-1 يقبل القسمة على 5

$$\text{إذا كان } n=5k+4 \text{ فإن } n^2-1=25k^2+40k+15=5(5k^2+40k+3)$$

و منه n^2-1 يقبل القسمة على 5

نتأكد إذا كانت $n = 5k + 2$ أو $n = 5k + 3$ فإن $n^2 + 1$ يقبل القسمة على 5 بنفس الطريقة.....

2- نبين أنه مهما كان n من \mathbb{N} فإن العدد $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5 *
إذا كانت n لا تقبل القسمة على 5 فإن $n = 5k + 1$ أو $n = 5k + 2$ أو $n = 5k + 3$ أو $n = 5k + 4$

ومنه $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 5 أو $n^2 + 1$ يقبل القسمة على 5

و بالتالي $(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^4 - 1$ يقبل القسمة على 5

إذن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5

* إذا كانت n تقبل القسمة على 5 فإن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5

إذن $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5 مهما كانت n من \mathbb{N}