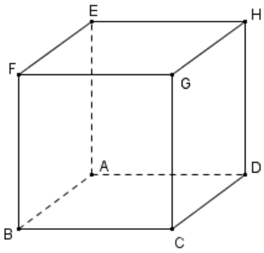
VECTEURS DE L'ESPACE

Exercice01 :



ABCDEFGH un cube on pose :
Simplifier : $\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}$

Solution :
On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)+\overrightarrow{FH}$
(Relation de Chasles)
$\vec{t}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}$ Car
$\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}$ (FHDB est un parallélogramme)
$\vec{t}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}$

Exercice02:
ABCDEFGH un cube et K milieu du segment $[EF]$ et L milieu du segment $[CF]$ et M un point du segment $[CD]$ tel que : $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

Montrer que : $(ML)\,||\,(DK)$

Solution : en utilisant la Relation de Chasles
On a : $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{CM}$ et puisque : L milieu du segment $[CF]$ Alors : $\overrightarrow{CL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

donc : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$ (1)

D'autre part On a : $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}$ et
$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CD}$ Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{CD}$
et puisque : K milieu du segment $[EF]$

Alors : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ donc : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (car : $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CD}$)

Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$

donc $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont colinéaires
Donc : $(ML)\,||\,(DK)$

Exercice03: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires
Déterminer les réels x et y tels que :
$x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v}$

Solution : $x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v}\Leftrightarrow$

$(x+y-2)\vec{u}+(2x+3y-5)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2=0\\2x+3y-5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\2x+3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Exercice04 :
ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment $[AD]$
on pose $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ $\overrightarrow{FC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{IO}=\vec{w}$
Montrer que : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Solution : On a : $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ et on a $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$
donc $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$
On considère le triangle ADF
et puisque : I milieu du segment $[AD]$
et O milieu du segment $[FD]$
on trouve : $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ Donc : $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AK}$
et puisque : K milieu du segment $[AF]$
cad $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$
et On considérons le point L tel que AFCL est un parallélogramme on trouve : $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$
Alors : $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$
Donc : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Exercice05 : ABCDEFGH un cube
M milieu du segment $[HE]$ et et N milieu du segment $[HG]$
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires ? justifier

Solution : On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment $[HE]$ N milieu du segment $[HG]$ on trouve : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{MN}$
et puisque $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$: alors $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}$ donc
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par

suite Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

Exercice06 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$

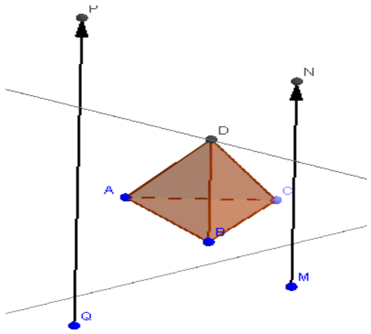
1)Tracer une figure

2)Ecrire $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$

3)En déduire que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

Solution :1)



2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = 2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = -3\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\right) = -3\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = -3\overrightarrow{BD}$

3) on a $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

on a $\overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

de❶ et ❷ on trouve : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

donc : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)on a $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

Exercice07 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points K ; L tel que :

$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Montrer que $(LD) \parallel (EK)$

Solution : pour montrer que $(LD) \parallel (EK)$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{LD}$, $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires ??

On a : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ on utilisant la Relation de Chasles

Donc : $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et

puisque : $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Alors : $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ❶

On a : $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

et puisque : $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ ❷

de ❶ et ❷ on déduit que : $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$

donc : $(LD) \parallel (EK)$

Exercice08 : ABCDEFGH un cube

K est le symétrique du point D par rapport a H

Montrer que $(AK) \parallel (BCG)$

Solution :on a : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$

donc : Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires

on déduit que : $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$

donc : $(AK) \parallel (BCG)$