

## TRIGONOMETRIE1

**Exercice1 :**

- 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure  $33^\circ$ .  
 2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure  $\frac{3\pi}{8}$  rad.  
 3) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure  $135^\circ$ .

$\pi$	?	$\frac{3\pi}{8}$
$180^\circ$	$33^\circ$	?

**Solution :**

$$1) x = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{60} \quad 2)$$

$$y = \frac{3\pi}{8} \times \frac{\pi}{180} = 67,5^\circ$$

3) on a :  $\frac{135}{180^\circ} = \frac{\gamma}{\pi}$  ssi  $135 \times \pi = \gamma \times 180$

Ssi  $\gamma = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{27 \times \pi}{36} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$

**Exercice2 :**

- 1) Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des abscisses suivantes

$$7\pi, \frac{110\pi}{3}, \frac{19\pi}{4}, -\frac{131\pi}{3}, -\frac{217\pi}{6}$$

- 2) Placer sur le cercle trigonométrique les points

$$A(0); B\left(\frac{\pi}{2}\right); C\left(\frac{\pi}{4}\right); D\left(\frac{\pi}{3}\right); E\left(\frac{\pi}{6}\right); M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{5\pi}{6}\right); G\left(-\frac{\pi}{2}\right); H\left(-\frac{\pi}{4}\right); N\left(\frac{3\pi}{2}\right); I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$$

**Solution :**

- $x = 7\pi$  et soit  $\alpha$  l'abscisses curviligne principale associée a  $x$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d  
 $\alpha = 7\pi + 2k\pi$  et  $\alpha \in ]-\pi; \pi]$

c a d  $-\pi < 7\pi + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

ssi  $\pi - 7\pi < 2k\pi \leq \pi - 7\pi$  ssi  $-8 < 2k \leq -6$  ssi  $-4 < k \leq -3$  et  $k \in \mathbb{Z}$

alors  $k = -3$  et donc

$$\alpha = 7\pi + 2(-3)\pi = 7\pi - 6\pi = \pi$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = 7\pi$   
 est  $\alpha = \pi$

- $x = \frac{110\pi}{3}$  et soit  $\alpha$  l'abscisses curviligne principale associée a  $x$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d

$$\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } \alpha \in ]-\pi; \pi]$$

c a d  $-\pi < \frac{110\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

ssi  $-\pi - \frac{110\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{110\pi}{3}$  ssi

$$-\frac{113\pi}{3} < 2k\pi \leq -\frac{107\pi}{3} \text{ ssi } -\frac{113}{6} < k \leq -\frac{107}{6}$$

et  $k \in \mathbb{Z}$  ssi  $-18.83 < k \leq -17.83$  et  $k \in \mathbb{Z}$   
 alors  $k = -18$  et donc

$$\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi = \frac{110\pi}{3} + 2(-18)\pi = \frac{110\pi - 108\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Donc l'abscisses curviligne principale associée a

$$x = \frac{110\pi}{3} \text{ est } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

- $x = \frac{19\pi}{4}$

On a  $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$

et  $\frac{3\pi}{4} \in ]-\pi; \pi]$  donc l'abscisses curviligne principale

associée a  $\frac{19\pi}{4}$  est  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

- $x = -\frac{131\pi}{3}$  et soit  $\alpha$  l'abscisses curviligne principale

associée a  $x$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d

$$\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } \alpha \in ]-\pi; \pi]$$

c a d  $-\pi < -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

ssi  $-\pi + \frac{131\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi + \frac{131\pi}{3}$  ssi

$$\frac{128\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{134\pi}{3}$$

ssi  $\frac{128}{6} < k \leq \frac{134}{6}$  et  $k \in \mathbb{Z}$  ssi

$$21.33 < k \leq 22.33 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

alors  $k = 22$  et donc

$$\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{131\pi}{3} + 2(22)\pi = \frac{-131\pi + 132\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$$x = -\frac{131\pi}{3} \text{ est } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

▪  $x = -\frac{217\pi}{6}$  et soit  $\alpha$  l'abscisses curviligne principale

associée a  $x$

Alors il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $\alpha - x = 2k\pi$  c a d

$$\alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \alpha \in ]-\pi; \pi]$$

c a d  $-\pi < -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{ssi } -\pi + \frac{217\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi + \frac{217\pi}{6} \text{ ssi}$$

$$\frac{211\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{223\pi}{6}$$

$$\text{ssi } \frac{211}{12} < k \leq \frac{223}{12} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

ssi  $17.58 < k \leq 18.58$  et  $k \in \mathbb{Z}$

alors  $k = 18$  et donc

$$\alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{217\pi}{6} + 2(18)\pi = \frac{-217\pi + 216\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$$x = -\frac{217\pi}{6} \text{ est } \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points

$$A(0); B\left(\frac{\pi}{2}\right); C\left(\frac{\pi}{4}\right); D\left(\frac{\pi}{3}\right); ; M\left(\frac{7\pi}{2}\right) E\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$F\left(\frac{5\pi}{6}\right); G\left(-\frac{\pi}{2}\right); H\left(-\frac{\pi}{4}\right); N\left(\frac{3\pi}{2}\right); I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$$

▪  $x = \frac{7\pi}{2}$  On a

$$\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2 \times 2\pi$$

$$\text{et } -\frac{\pi}{2} \in ]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = \frac{7\pi}{2}$

$$\text{est } \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{▪ } x = \frac{2007\pi}{4}$$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve 501,75 on prend le nombre entier proche ex : 502

$$\text{Donc : } \frac{2007\pi}{4} - 502\pi = \frac{2007\pi}{4} - \frac{2008\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2007\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 502\pi = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 251\pi \text{ et } -\frac{\pi}{4} \in ]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a  $x = \frac{2007\pi}{4}$

$$\text{est } \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Methode2 : } -\pi < \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$$

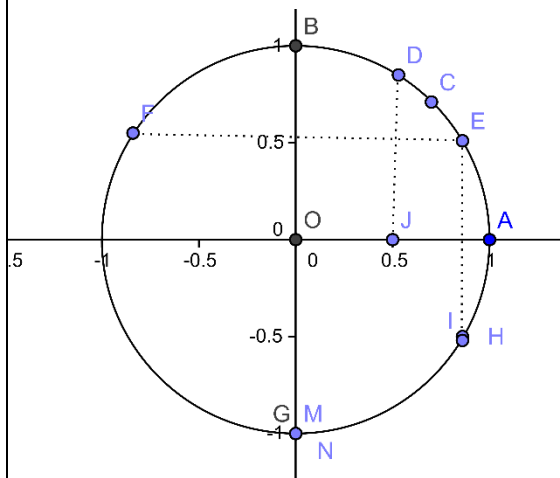
$$-1 < \frac{2007}{4} + 2k \leq 1 \text{ ssi } -1 - \frac{2007}{4} < 2k \leq 1 - \frac{2007}{4}$$

$$\text{ssi } -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \text{ donc}$$

$$-251,3 \approx -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \approx -250,3$$

Donc  $k = -251$  Donc

$$\alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2(-251)\pi = -\frac{\pi}{4}$$



**Exercice3 :** Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des points suivants

$$M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right); M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right); M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right); M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$$

**Solution :**

$$\text{▪ } x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\text{Methode1 : } \frac{9\pi}{2} = \frac{8\pi + \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

et  $\frac{\pi}{2} \in ]-\pi; \pi]$  donc l'abscisses curviligne principale du

point  $M_0$  est  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Methode2:  $-\pi < \frac{9\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $-1 < \frac{9}{2} + 2k \leq 1$  Donc

$-1 - \frac{9}{2} < \frac{9}{2} + 2k \leq 1 - \frac{9}{2}$

Donc  $-\frac{11}{2} < 2k \leq -\frac{7}{2}$  Donc  $-\frac{11}{4} < k \leq -\frac{7}{4}$

Donc  $-2,7 \approx -\frac{11}{4} < k \leq -\frac{7}{4} \approx -1,7$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k = -2$  Donc

$\alpha = \frac{9\pi}{2} + 2(-2)\pi = \frac{9\pi}{2} - 4\pi = \frac{9\pi - 8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_0$  est  $\alpha = \frac{\pi}{2}$

▪  $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a  $\frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi$

et  $-\frac{\pi}{3} \in ]-\pi; \pi]$  donc l'abscisses curviligne principale du

point  $M_1$  est  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Methode2:  $-\pi < \frac{11\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $-1 < \frac{11}{3} + 2k \leq 1$  Donc

$-1 - \frac{11}{3} < \frac{11}{3} + 2k \leq 1 - \frac{11}{3}$

Donc  $-\frac{14}{3} < 2k \leq -\frac{8}{3}$  Donc  $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3}$

Donc  $-2,3 \approx -\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3} \approx -1,3$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k = -2$  Donc

$\alpha = \frac{11\pi}{3} + 2(-2)\pi = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi - 12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisses curviligne principale du point

$M_1$  est  $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

▪  $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a

$\frac{67\pi}{4} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4} = 2 \times 8\pi + \frac{3\pi}{4}$

et  $\frac{3\pi}{4} \in ]-\pi; \pi]$  donc l'abscisses curviligne principale du

point  $M_2$  est  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Methode2:  $-\pi < \frac{67\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $-1 < \frac{67}{4} + 2k \leq 1$

Donc  $-1 - \frac{67}{4} < \frac{67}{4} + 2k \leq 1 - \frac{67}{4}$

Donc  $-\frac{71}{4} < 2k \leq -\frac{63}{4}$

Donc  $-8,8 \approx -\frac{71}{8} < k \leq -\frac{63}{8} \approx -7,8$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k = -8$  Donc :

$\alpha = \frac{67\pi}{4} + 2(-8)\pi = \frac{67\pi}{4} - 16\pi = \frac{67\pi - 64\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

donc l'abscisses curviligne principale du point  $M_2$

est  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

▪  $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

On a  $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \times 3\pi + \frac{\pi}{3}$

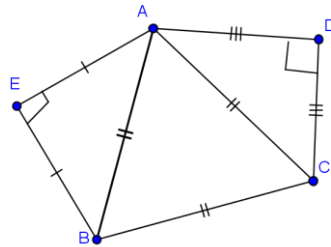
et  $\frac{\pi}{3} \in ]-\pi; \pi]$  donc l'abscisses curviligne principale du

point  $M_3$  est  $\alpha = \frac{\pi}{3}$

**Exercice4** : d'après la figure suivante donner la mesure principale des angles orientés suivant :

$(\overline{AB}; \overline{AC})$  et  $(\overline{AE}; \overline{AD})$  et  $(\overline{BC}; \overline{BE})$  et  $(\overline{CB}; \overline{CD})$

Et  $(\overline{EB}; \overline{EA})$  et  $(\overline{DC}; \overline{DA})$



Le triangle :  $ACD$  est rectangle et isocèle en  $D$  et Le triangle :  $ABC$  est équilatérale

• La mesure principale de l'angle orienté  $(\overline{AB}; \overline{AC})$  est  $\frac{\pi}{3}$

Et on écrit :  $(\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• La mesure principale de l'angle orienté  $(\overline{DC}; \overline{DA})$  est  $-\frac{\pi}{2}$

Et on écrit :  $(\overline{DC}; \overline{DA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• on a :  $(\overline{CB}; \overline{CD}) = (\overline{CB}; \overline{CA}) + (\overline{CA}; \overline{CD})$

donc : La mesure principale de l'angle orienté  $(\overline{CB}; \overline{CD})$

est :  $-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \text{ cad } -\frac{7\pi}{12}$

• Le triangle :  $AEB$  est rectangle et isocèle en  $E$

Donc :  $(\overline{AE}; \overline{AD}) = (\overline{AE}; \overline{AB}) + (\overline{AB}; \overline{AC}) + (\overline{AC}; \overline{AD})$

Ssi  $(\overline{AE}; \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Donc : La mesure principale de l'angle  $(\overline{AE}; \overline{AD})$  est  $\frac{5\pi}{6}$

• on a :  $(\overline{BC}; \overline{BE}) = (\overline{BC}; \overline{BA}) + (\overline{BA}; \overline{BE})$

Donc : La mesure principale de l'angle  $(\overline{BC}; \overline{BE})$  est :

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \text{ cad } \frac{7\pi}{12}$

• La mesure principale de l'angle  $(\overline{BE}; \overline{EA})$  est :  $\frac{\pi}{2}$

### Exercice5 :

Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel

suivantes  $7\pi$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{7\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $-\frac{4\pi}{3}$

**Solution :**

$$\checkmark \cos(7\pi) = \cos(\pi + 6\pi) = \cos(\pi + 2 \times 3\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\sin(7\pi) = \sin(\pi + 6\pi) = \sin(\pi + 2 \times 3\pi) = \sin(\pi) = 0$$

$$\tan(7\pi) = \tan(0 + 7\pi) = \tan(0) = 0$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

### Exercice6 :

Calculer :  $\cos\frac{10\pi}{3}$  ;  $\sin\frac{53\pi}{6}$  ;  $\cos\frac{34\pi}{3}$  ;  $\cos\frac{13\pi}{6}$  ;  $\tan\frac{37\pi}{4}$

**Solution :** on peut utiliser les résultats du tableau :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\tan x}$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{53\pi}{6} = \sin\left(\frac{54\pi - \pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{54\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(9\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(8\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\frac{53\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3} = \cos\left(\frac{33\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{33\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(11\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(10\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{37\pi}{4} = \tan\left(\frac{36\pi + \pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{36\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

**Exercice7:** montrer que :  $1+(\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$  si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Solution :**

$$1+(\tan x)^2 = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

Et on a :  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  donc :  $1+(\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$

**Exercice8:** on a :  $\tan x = \frac{1}{3}$  et  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Calculer : 1)  $\cos x$  2)  $\sin x$

**Solution :** 1) on a :  $1+(\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$  donc

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Donc  $1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$  Donc  $\frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$  Donc

$$10\cos^2 x = 9$$

Donc  $\cos^2 x = \frac{9}{10}$  Donc  $\cos x = \sqrt{\frac{9}{10}}$  et  $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  : donc  $\cos x \leq 0$  Donc :

$$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

2) on a :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  donc  $\sin x = \tan x \times \cos x$  donc

$$\sin x = -\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

**Exercice9:** on a :  $\sin x = -\frac{4}{5}$  et  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Calculer :  $\cos x$  et  $\tan x$

**Solution :** on a :  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  donc  $(\cos x)^2 + \frac{16}{25} = 1$

Donc  $(\cos x)^2 = 1 - \frac{16}{25}$  donc :  $(\cos x)^2 = \frac{9}{25}$

Donc :  $\cos x = \sqrt{\frac{9}{25}}$  ou  $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc :  $\cos x = \frac{3}{5}$  ou  $\cos x = -\frac{3}{5}$

Or on a  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  donc :  $\cos x \geq 0$

Par suite :  $\cos x = \frac{3}{5}$

On a :  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

**Exercice10:1)** sachant que :  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$  et  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Calculer :  $\cos x$  et  $\tan x$

2) sachant que :  $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$  et  $\tan x = 2\sqrt{3}$

Calculer :  $\cos x$  et  $\sin x$

3) sachant que :  $\cos x > \sin x > 0$  et  $\cos x \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Calculer :  $\cos x + \sin x$  et  $\cos x - \sin x$

Et en déduire  $\cos x$  et  $\sin x$

**Solution :**

• on a  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$  et on a :  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc :  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  donc  $\cos^2 x = 1 - \frac{2}{9}$

donc :  $\cos^2 x = \frac{7}{9}$  donc :  $\cos x = \sqrt{\frac{7}{9}}$  ou  $\cos x = -\sqrt{\frac{7}{9}}$

or  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  donc :  $\cos x < 0$  donc :  $\cos x = -\sqrt{\frac{7}{9}}$

$$\tan x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{14}}{7}$$

2) on a :  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  et  $\tan x = 2\sqrt{3}$

Donc :  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$  donc :  $\cos^2 x = \frac{1}{1 + 12}$

Donc :  $\cos^2 x = \frac{1}{13}$  donc :  $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{13}$  ou  $\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{13}$

or  $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$  donc  $\cos x < 0$

donc :  $\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{13}$

on a :  $\tan x \cdot \cos x = \sin x$  donc :  $\sin x = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$

donc :  $\sin x = -\frac{2\sqrt{39}}{13}$

3) on a :  $\cos x > \sin x > 0$  et  $\cos x \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Et on a :  $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

Ssi  $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2}$

Ssi  $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}$  (1) car  $\cos x + \sin x > 0$

Et on a :  $(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

$$\text{Donc : } (\cos x - \sin x)^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{3})^2}$$

$$\text{Donc : } \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}} \quad (2) \quad \text{car } \cos x - \sin x > 0$$

$$(1)+(2) \text{ donne : } \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(1)-(2) \text{ donne : } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Exercice 11:** simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x)$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x)$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

**Solution :** on a : donc

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x)$$

$$A = \sin(x) \times \sin(x) - \cos x \times (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x + \sin x}{-\cos x} = -\frac{2 \sin x}{\cos x} = -2 \tan x$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$$

$$C = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Donc : } C = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$D = \sin(10\pi + \pi - x) + \cos(4\pi + \pi + x) + \cos(2 \times 7\pi - x)$$

$$D = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(-x)$$

$$D = \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = \sin(x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x) = -\tan(x) + \tan(x) = 0$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi \text{ donc : } \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{Et on a } \frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi \text{ donc : } \frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$$

$$\text{Et on a } \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi \text{ donc : } \frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$$

Donc :

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

Donc :

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi \text{ donc : } \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Et on a } \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi \text{ donc : } \frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$$

Donc :

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

Donc :

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\text{Et on a } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Donc on a : } H = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

Donc

$$H = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \left( \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) = 2 \times 1 = 2$$

**Exercice 12:** simplifier les expressions suivantes :

$$1) A = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} - 2\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2) B = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8}$$

$$3) C = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$$

$$\text{Solution : 1) } A = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} - 2\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$\text{On remarque que : } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$$

Donc :  $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$  et  $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$  donc :

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} + \cos \left( \pi - \frac{\pi}{5} \right) - 2 \sin \left( \pi - \frac{\pi}{5} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right)$$

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} - \cos \left( \frac{\pi}{5} \right) - 2 \sin \left( \frac{\pi}{5} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{5} \right) = 0$$

2)  $B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

On remarque que :  $\frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$  Et  $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$

Donc :  $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$  et  $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$

Donc :  $B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \left( \pi - \frac{3\pi}{8} \right) + \cos^2 \left( \pi - \frac{\pi}{8} \right)$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \left( -\cos \frac{3\pi}{8} \right)^2 + \left( -\cos \frac{\pi}{8} \right)^2$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \left( -\cos \frac{3\pi}{8} \right)^2 + \left( -\cos \frac{\pi}{8} \right)^2$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8}$$

$$B = 2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right)$$

Et on remarque aussi que :  $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$   $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

Donc :  $B = 2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = 2 \left( \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} \right) \right) = 2 \times 1 = 2$

3)  $C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$

on remarque que :  $\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi$  donc  $\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$

$$\frac{3\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \pi \text{ donc } \frac{9\pi}{12} = \pi - \frac{3\pi}{12}$$

$$\text{Et } \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi \text{ donc } \frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$$

Donc on a :

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left( \pi - \frac{5\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \pi - \frac{3\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \pi - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left( \frac{5\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \frac{3\pi}{12} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{12} \right)$$

$$C = 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{5\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$C = 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} \right) + 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

Et on remarque aussi que :  $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Donc } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

On a donc :

$$C = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right) + 1 = 2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \left( \frac{\pi}{12} \right) \right) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

