

**TD : Exercices d'applications et de réflexion**

**THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)**

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM BIOF

**TD : THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)**

**Exercice 1 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2 \quad \text{Montrer que } f'$$

s'annule au moins une fois sur  $]0, 1[$

**Exercice 2 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x},$$

Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f$  s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $]a, a + 2\pi[$ .

**Exercice 3 :** Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

Montrer :  $(\exists c \in ]-1, 1[) (f'(c) = 0)$

**Exercice 4 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \quad \text{Montrer que}$$

l'équation  $f'(x) = 0$  admet trois solutions sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 5 :** Considérons une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$  telle que :  $f(0) - f(1) = -1$ .

Montrer en utilisant le théorème de Rolle

$$(\exists c \in ]0, 1[) \left( \frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2 + 1)^2} \right)$$

**Exercice 6 :** Détermination d'une limite.

Considérons les deux fonctions :

$$u(t) = \text{Arctan}(t) - t \quad \text{et } v(t) = t^2 \quad \text{et soit } x \in \mathbb{R}^*$$

1) Montrer qu'il existe  $c$  compris entre 0 et  $x$  tel

$$\text{que : } \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$$

2) En déduire la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2}$

**Exercice 7 :** En utilisant le I.A.F

Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$

**Exercice 8 :** En utilisant le I.A.F

Montrer que  $\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall b \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq a \leq b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

**Exercice 9 :** En utilisant le Théorème des accroissements finis (T.A.F) donner un

encadrement du nombre  $\sqrt{10001}$  et en déduire

une valeur approchée de  $\sqrt{10001}$  avec la

précision  $5 \times 10^{-5}$ .

**Exercice 10 :** soit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer  $u_1$  ;  $u_2$  et  $u_3$

2) a) montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

b) en déduire que :  $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 11 :** Soit  $f$  une fonction définie sur

l'intervalle  $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$  par :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin x \quad \text{et la suite } (u_n) \text{ définie par :}$$

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et } u_0 \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$$

1) montrer que l'équation :  $f(x) = x$  admet une

solution unique  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$

2) montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$

3)a) montrer que :  $\forall x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) en déduire que :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 12** : Soit  $f$  une fonction dérivable trois fois sur  $[0;1]$  tel que :  $f(1) = 1$  et

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$$

Et soit le polynôme :  $P(x) = x^2(-2x+3)$

1) calculer :  $P(0)$  ;  $P'(0)$  ;  $P(1)$  ;  $P'(1)$

2) on pose :  $g(x) = f(x) - P(x)$

a) montrer qu'il existe  $\alpha \in ]0;1[$  tel que :  $g^{(3)}(\alpha) = 0$

b) en déduire qu'il existe  $\alpha \in ]0;1[$  tel que :

$$f^{(3)}(\alpha) = -12$$

**Exercice 13** : Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$

$$\text{par : } f(x) = x \arctan \left( \sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ on pose : } F(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1) vérifier que :  $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$

2) montrer que :

$$\left( \forall x \in \mathbb{R}^* \right) \left( \exists y \in \mathbb{R}^* \right) / (y-x) \left( y - \frac{1}{x} \right) \leq 0 \text{ et } F'(y) = 0$$

3) en application le théorème de Rolle a  $F$  sur un intervalle montrer qu'il existe un réel  $c$  non nul tel que la tangente a la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $c$  passe par l'origine du repère

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*



**TD : Exercices d'applications et de réflexion avec solutions**

**THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)**

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM BIOF

**TD avec solutions : THEOREME DE ROLLE ; THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS (T.A.F)**

**Exercice 1 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2 \quad \text{Montrer que } f'$$

s'annule au moins une fois sur  $]0, 1[$

**Solution :** on a :  $f(0) = f(1) = 2$

Donc  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$  et telle que :  $f(0) = f(1)$ . D'après le théorème de Rolle il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel

que :  $f'(c) = 0$  donc :  $f'$  s'annule au moins une fois sur  $]0, 1[$

**Exercice 2 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x},$$

Montrer que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f'$  s'annule au moins une fois sur l'intervalle  $]a, a + 2\pi[$ .

**Solution :** on a :  $f(a) = f(a + 2\pi)$

Donc  $f$  une fonction continue sur  $[a, a + 2\pi]$ , dérivable sur  $]a, a + 2\pi[$  et telle que :

$f(a) = f(a + 2\pi)$  D'après le théorème de Rolle il existe un réel  $c \in ]a, a + 2\pi[$  tel que :  $f'(c) = 0$

donc :  $f'$  s'annule au moins une fois sur

$]a, a + 2\pi[$

**Exercice 3 :** Soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos(2\pi x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f(0) = 0$$

Montrer :  $(\exists c \in ]-1, 1[) (f'(c) = 0)$

**Solution :** la fonction  $f$  continue sur  $[-1; 1] - \{0\}$  et

dérivable sur  $[-1; 1] - \{0\}$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2} 4\pi^2 x = 0 = f(0)$$

Donc :  $f$  est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{(2\pi x)^2} 4\pi^2 = 2\pi^2 \in \mathbb{R}$$

Donc :  $f$  est dérivable en 0

Donc : fonction  $f$  continue sur  $[-1; 1]$  et dérivable sur  $[-1; 1]$  et on a :  $f(-1) = f(1)$

D'après le théorème de Rolle il existe un réel  $c \in ]-1, 1[$  tel que :  $f'(c) = 0$

**Exercice 4 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \quad \text{Montrer que}$$

l'équation  $f'(x) = 0$  admet trois solutions sur  $\mathbb{R}$

**Solution :**  $f$  une fonction continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $f(0) = f(-1) = f(-2) = f(-3)$

D'après le théorème de Rolle on a :

$$\exists \alpha \in ]-3; -2[ / f'(\alpha) = 0$$

$$\exists \beta \in ]-2; -1[ / f'(\beta) = 0$$

$$\exists \delta \in ]-1; 0[ / f'(\delta) = 0$$

Et puisque :  $\alpha$  ;  $\beta$  et  $\delta$  sont différents deux à deux

Donc : l'équation  $f'(x) = 0$  admet trois solutions

sur  $\mathbb{R}$  car  $f'(x)$  est de degré 3

**Exercice 5 :** Considérons une fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$  et dérivable sur  $]0, 1[$  telle que :

$$f(0) - f(1) = -1.$$

Montrer en utilisant le théorème de Rolle

$$(\exists c \in ]0, 1[) \left( \frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2 + 1)^2} \right)$$

**Solution :**  $\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2} \Rightarrow f'(c) - \frac{4c}{(c^2+1)^2} = 0$

Considérons une fonction  $g$  tel que :

$$G(0) = G(1)$$

Soit  $G$  la fonction primitive de  $g$

donc :  $G(x) = f(x) + \frac{2}{x^2+1}$

$$G(0) - G(1) = f(0) + 2 - f(1) - 1 = f(0) - f(1) + 1 = 0$$

Donc ;  $G(0) = G(1)$

Et puisque :  $G$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$  (somme et quotient de fonctions dérivables et continues)

D'après le théorème de Rolle il existe un réel  $c \in ]0, 1[$  tel que :  $G'(c) = 0$

Et on a :  $G'(x) = f'(x) - \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

$$G'(c) = f'(c) - \frac{4c}{(c^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{4c}{(c^2+1)^2}$$

il existe un réel  $c \in ]0, 1[$  tel que :  $\frac{f'(c)}{c} = \frac{4}{(c^2+1)^2}$

**Exercice 6 :** Détermination d'une limite.

Considérons les deux fonctions :

$u(t) = \text{Arctan}(t) - t$  et  $v(t) = t^2$  et soit  $x \in \mathbb{R}^*$

1) Montrer qu'il existe  $c$  compris entre 0 et  $x$  tel

que :  $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$

2) En déduire la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2}$

**Solution :** 1)

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)} \Leftrightarrow u(x)v'(c) - v(x)u'(c) = 0$$

On Considérer la fonction :  $g$  tel que :

$$g(t) = u(x)v(t) - v(x)u(t) \text{ sur } [a, b]$$

où  $a = \inf(x, 0)$  et  $b = \sup(x, 0)$

on a :  $g(0) = g(x) = 0$  et  $g$  continue sur  $[a, b]$  et

dérivable sur  $]a, b[$

Alors il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que :  $g'(c) = 0$ .

On a :  $g'(t) = u(x)v'(t) - v(x)u'(t)$

Donc : il existe un réel  $c \in ]a, b[$  tel que :

$$u(x)v'(c) - v(x)u'(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+c^2} - 1}{2c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1 - 1 - c^2}{2c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{-c^2}{2c} = 0$$

Car ; si  $x \rightarrow 0$  alors  $c \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+c^2} - 1}{2c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{-c}{2(1+c^2)} = 0$$

**Exercice 7 :** En utilisant le I.A.F

Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(|\sin x| \leq |x|)$

**Solution :** Considérons une fonction  $f$  tel que :

$f(x) = \sin x$  on a :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Et  $f'(x) = \cos x$  et  $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Par application de I.A.F sur l'intervalle de borne 0 et  $x$  ( $[a, b]$  où  $a = \inf(x, 0)$  et  $b = \sup(x, 0)$ )

$$|f(b) - f(a)| \leq 1|(b-a)|$$

Donc :  $|\sin x - \sin 0| \leq 1|(x-0)|$

Donc :  $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Exercice 8 :** En utilisant le I.A.F

Montrer que  $\forall a \in \mathbb{R}$  et  $\forall b \in \mathbb{R}$  et  $0 \leq a \leq b$

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

**Solution :** Considérons une fonction  $f$  tel que :

$f(x) = \arctan x$  on a :  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

Et  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

donc :  $\frac{1}{1+b^2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{1+a^2} \quad \forall x \in [a; b]$

Par application de T.A.F sur l'intervalle  $[a; b]$

On a :  $\frac{1}{1+b^2}(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \frac{1}{1+a^2}(b-a)$

$$\text{Donc : } \frac{b-a}{1+b^2} \leq ar \tan b - ar \tan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$$

**Exercice 9 :** En utilisant le Théorème des accroissements finies (T.A.F) donner un encadrement du nombre  $\sqrt{10001}$  et en déduire une valeur approchée de  $\sqrt{10001}$  avec la précision  $5 \times 10^{-5}$ .

**Solution :** Considérons une fonction  $f$  tel que :  
 $f(x) = \sqrt{x}$  on a : On a :  $f$  est fonction continue sur  $[10000, 10001]$  et dérivable sur  $]10000, 10001[$  [donc d'après le T. A.F il existe  $c \in ]10000, 10001[$  [tel que :  $\sqrt{10001} - 100 = \frac{1}{2\sqrt{c}}$

$$\text{Donc : } \sqrt{10001} = \frac{1}{2\sqrt{c}} + 100$$

$c \in ]10000, 10001[$  [ donc  $10000 < c < 10001$

$$\text{Donc : } \sqrt{10000} < \sqrt{c} < \sqrt{10001} \text{ donc}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{10001}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{10000}} \text{ donc}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{10001}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{200} \text{ et on a : } \sqrt{10001} < 101$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{202} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{200} \text{ donc}$$

$$\frac{1}{202} + 100 < \frac{1}{2\sqrt{c}} + 100 < \frac{1}{200} + 100 \text{ donc :}$$

$$100,00495 < \sqrt{10001} < 100,005$$

$$\text{Donc : } 0 < \sqrt{10001} - 100,00495 < 0,00005$$

$$\text{Donc : } \left| \sqrt{10001} - 100,00495 \right| < 5 \times 10^{-5} \text{ donc } 100,00495$$

Est une valeur approchée de  $\sqrt{10001}$  avec la précision  $5 \times 10^{-5}$ .

**Exercice 10 :** soit la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Calculer  $u_1$  ;  $u_2$  et  $u_3$

2)a) monter que  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+ : \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

b) en déduire que :  $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\text{Solution : 1) } u_1 = 1 \quad u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

2)a) : Considérons une fonction  $f$  tel que :

$f(t) = \ln t$  on a : On a :  $f$  est fonction continue

sur  $[x, x+1]$  et dérivable sur

$]x, x+1[$  [  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$  donc d'après le T. A.F il existe

$c \in ]x, x+1[$  [tel que :  $f(x+1) - f(x) = f'(c)(x+1-x)$

$$\text{Donc : } \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c} \text{ et puisque : } \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\text{Car } c \in ]x, x+1[ \text{ [ donc : } \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+$

2)b) déduire que :  $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* ?$

$$\text{On a : } \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_*^+$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$$

.....

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

La somme de ces inégalités membre a membre

$$\text{donne : } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln 1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc : } u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n \text{ car } \ln 1 = 0$$

$$2)b) \text{ on a : } n(n+1) \leq u_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n+1) = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

**Exercice 11 :** Soit  $f$  une fonction définie sur

$$\text{l' intervalle } \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ par : } f(x) = \frac{\pi}{2} - \sin x \text{ et la suite}$$

$$(u_n) \text{ définie par : } u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$$

1) montrer que l'équation :  $f(x) = x$  admet une

$$\text{solution unique } \alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$2) \text{ montrer que : } \forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$$

$$3)a) \text{ montrer que : } \forall x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \text{ en déduire que : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$4) \text{ calculer : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

**Solution :** 1) Considérons une fonction  $g$  tel que :

$$g(x) = f(x) - x \quad \text{On a : } g \text{ est une fonction}$$

$$\text{dérivable sur } \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ et } g'(x) = f'(x) - 1 = -\cos x - 1 < 0$$

$g$  est une fonction continue et strictement

$$\text{décroissante sur } \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ donc une bijection de } \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\text{dans : } g\left(\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \right) = \left] -1; \frac{2\pi-3}{6} \right[$$

$$\text{Puisque : } 0 \in \left] -1; \frac{2\pi-3}{6} \right[ \text{ alors il existe un unique}$$

$$\alpha \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ tel que : } g(\alpha) = 0 \text{ cad } f(\alpha) = \alpha$$

2) montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2} ?$$

$$a) \text{ on a : } u_0 \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ donc vraie pour } n=0$$

$$b) \text{ supposons que : } \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$$

$$c) \text{ montrons que : } \frac{\pi}{6} < u_{n+1} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{on a : } f'(x) = -\cos x \leq 0 \text{ sur } \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ donc } f \text{ est}$$

$$\text{décroissante sur } \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ et on a : } \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc : } f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(u_n) < f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{donc } \frac{\pi}{2} - 1 < u_{n+1} < \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{ et on a } \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - 1 \text{ et } \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{donc : } \frac{\pi}{6} < u_{n+1} < \frac{\pi}{2} \text{ finalement : } \forall n \in \mathbb{N} : \frac{\pi}{6} < u_n < \frac{\pi}{2}$$

$$3)a) \text{ montrons que : } \forall x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} ?$$

$$\forall x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad f'(x) = -\cos x \text{ et puisque } x \rightarrow \cos x$$

$$\text{est décroissante sur } \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \text{ on a donc :}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} < \cos x \leq \cos \frac{\pi}{6} \text{ donc : } 0 < \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc : } -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\cos x \leq 0 < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc : } \forall x \in \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad |f'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) déduire que :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ?

puisque  $f$  est dérivable sur  $\left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$  alors  $f$  est

dérivable et continue sur tout intervalle de la forme

$[a; b] \subset \left] \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right[$  donc Par application de I.A.F sur

l'intervalle  $[a; b]$  avec :  $u_n = b$  et  $a = \alpha$

on trouve :  $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) calculons :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ?

Montrons avant que :  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

on a :  $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$  donc vraie pour  $n=0$

b) supposons que :  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

c) montrons que :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$  ?

on a :  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$  et  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \alpha|$

donc :  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$

donc :  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$  et puisque :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$  car  $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$

**Exercice 12 :** Soit  $f$  une fonction dérivable trois fois sur  $[0; 1]$  tel que :  $f(1) = 1$  et

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$$

Et soit le polynôme :  $P(x) = x^2(-2x+3)$

1) calculer :  $P(0)$  ;  $P'(0)$  ;  $P(1)$  ;  $P'(1)$

2) on pose :  $g(x) = f(x) - P(x)$

a) montrer qu'il existe  $\alpha \in ]0; 1[$  tel que :  $g^{(3)}(\alpha) = 0$

b) en déduire qu'il existe  $\alpha \in ]0; 1[$  tel que :

$$f^{(3)}(\alpha) = -12$$

**Solution :** 1)  $P(x) = x^2(-2x+3)$  et  $P'(x) = -6x^2 + 6x$

Donc :  $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$  et  $P(1) = 1$

2) a) montrons qu'il existe  $\alpha \in ]0; 1[$  tel que :

$$g^{(3)}(\alpha) = 0 ?$$

puisque  $f$  et  $P$  sont dérivables trois fois sur  $[0; 1]$

donc  $g = f - P$  est dérivable trois fois sur  $[0; 1]$

et par application du théorème de Rolle trois fois :

$$g(0) = g(1) \Rightarrow \exists c_1 \in ]0; 1[ / g'(c_1) = 0 \quad (g^{(1)}(c_1) = 0)$$

$$g^{(1)}(0) = f^{(1)}(0) - P^{(1)}(0) = 0 - 0 = 0$$

$$g^{(1)}(c_1) = g^{(1)}(0) \Rightarrow \exists c_2 \in ]0; 1[ / g^{(2)}(c_2) = 0$$

$$g^{(1)}(c_1) = g^{(1)}(1) \Rightarrow \exists c_3 \in ]0; 1[ / g^{(2)}(c_3) = 0$$

$$g^{(2)}(c_2) = g^{(2)}(c_3) \Rightarrow \exists \alpha \in ]c_2; c_3[ / g^{(3)}(\alpha) = 0$$

Et puisque :  $]c_2; c_3[ \subset ]0; 1[$  donc :

$$\exists \alpha \in ]0; 1[ / g^{(3)}(\alpha) = 0$$

b)  $\exists ? \alpha \in ]0; 1[$  tel que :  $f^{(3)}(\alpha) = -12$  ?

on a :  $g(x) = f(x) + 2x^3 - 3x^2$

$$g'(x) = f'(x) + 6x^2 - 6x \text{ donc : } g''(x) = f''(x) + 12x$$

$$\text{donc : } g^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) + 12 \text{ donc :}$$

$$g^{(3)}(\alpha) = f^{(3)}(\alpha) + 12 = 0$$

$$\text{donc : } \exists \alpha \in ]0;1[ \quad f^{(3)}(\alpha) = -12$$

**Exercice13 :** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$

$$\text{par : } f(x) = x \arctan\left(\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}^* \text{ on pose : } F(x) = \frac{f(x)}{x}$$

$$1) \text{vérifier que : } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$$

2) montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) (\exists y \in \mathbb{R}^*) / (y-x) \left(y - \frac{1}{x}\right) \leq 0 \text{ et } F'(y) = 0$$

3) en application le théorème de Rolle a  $F$  sur un intervalle montrer qu'il existe un réel  $c$  non nul tel que la tangente a la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $c$  passe par l'origine du repère

$$\text{Solution :1) } F(x) = \frac{f(x)}{x} = \arctan\left(\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan\left(\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x^2}}\right) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$2) \text{on a : } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$$

Et on a  $F$  est continue et dérivable sur un

l'intervalle de bornes :  $\frac{1}{x}$  et  $x$

Donc par application le théorème de Rolle a  $F$

sur un intervalle de bornes :  $\frac{1}{x}$  et  $x$  :

2)a) soit par exemple l'intervalle :  $\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$

On a :  $F$  dérivable sur  $\left[\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right]$  et  $F\left(\frac{4}{5}\right) = F\left(\frac{5}{4}\right)$  par

application le théorème de Rolle a  $F$

$$\exists c \in \left]\frac{4}{5}; \frac{5}{4}\right[ / F'(c) = 0 \text{ or } F'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$F'(c) = \frac{c f'(c) - f(c)}{c^2} = 0 \Leftrightarrow c f'(c) - f(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

L'équation de la tangente a la courbe de  $f$  au point

d'abscisse  $c$  est :  $y = f'(c)(x-c) + f(c)$

$$y = \frac{f(c)}{c}(x-c) + f(c) = \frac{f(c)}{c}x - f(c) + f(c) = \frac{f(c)}{c}x$$

Donc : passe par l'origine du repère

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien*

