

LIMITES DE SUITES

EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Déterminer la limite (éventuelle) des suites (u_n) ci-dessous :

1) $u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

2) $u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) $u_n = 7 + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

4) $u_n = 3 \times (-2)^n$

5) $u_n = 5^n - 4^n$

6) $\frac{3^n + 2}{8^n - 1}$

7) $u_n = \frac{1}{n+3}$

8) $u_n = \frac{2n}{n+1}$

9) $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1-n}$

Exercice n°2.

Montrez que la suite (u_n) satisfait la relation (R), puis vous en déduisez la limite de cette suite.

a) $u_n = \frac{\cos n}{n+1}$ (R): $|u_n| \leq \frac{1}{n+1}$

b) $u_n = \sin(2n) + n$ (R): $u_n \geq n - 1$

c) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$ (R): $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^2+1}$

d) $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$ (R): $u_n \geq \frac{n-1}{3}$

Exercice n°3.

On considère une suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$. On pose $v_n = u_n - 3$.

1) a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice n°4.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \end{cases}$ pour tout entier naturel n

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $n \leq u_n$. Qu'en déduit-on ?

Exercice n°5.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$

1) a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Quel semble être la limite de (u_n) ?

2) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n^2 - 4$ est géométrique.

En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

Exercice n°6.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout n , $0 \leq u_n < 2$

2) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout n par $v_n = 2 - u_n$

a) Quel est le signe de v_n ?

b) Montrer que, pour tout entier n , $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

Exercice n°7.

Soit (u_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que (u_n) est majorée par 4.
- b) Montrer que (u_n) est strictement croissante
- c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
- 2) a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
- b) Retrouver le résultat du 1.c)
- c) Etudier la convergence de la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = n^2(4 - u_n)$

Exercice n°8.

On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$
- 2) Montrer que la suite u est strictement croissante.
- 3) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°9.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$.

- 1) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des quatre premiers termes de la suite (u_n)
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier n , si $0 < u_n < 2$
- 3) Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geq 0$
- 4) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n . Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n . Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?
- 5) Montrer que pour tout n , $|u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2}|u_n - 2|$.
- 6) En déduire que pour tout n , $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$.
- 7) Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice n°10.

Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 2 \cos \theta$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout entier naturel n

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de θ (On rappelle que, pour tout réel x , on a : $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$)
- 2) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
- 3) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{\theta}{2^n}$. Déterminer la limite de la suite (v_n)
- 4) En déduire que (u_n) est convergente ; quelle est sa limite ?

Exercice n°11.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right)$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle stationnaire ?

2) On pose $u_0 = 1$.

a) Démontrer les relations suivantes : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{3})^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{3})^2$

b) Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante pour $n \geq 1$

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_1 et de n .

b) Calculer la limite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et retrouver la limite de $(u_n)_n$

Exercice n°12.

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1, v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1) On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison

b) Déterminer la limite de la suite w

2) a) Montrer que la suite u est croissante

b) Montrer que la suite v est décroissante

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

3) Montrer que les deux suites u et v convergent et ont la même limite que l'on appellera l

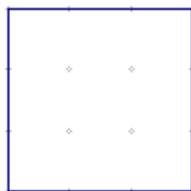
4) On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante

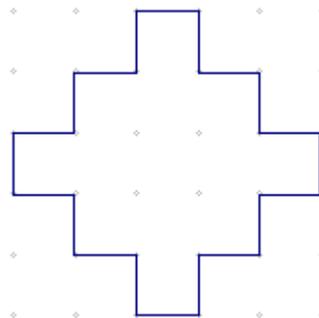
b) Déterminer alors la valeur de l

Exercice n°13.

On considère un carré F_1 de côté de longueur 1. Au milieu de chaque côté, à l'extérieur de F_1 , on place un carré de côté $1/3$, dont on supprime le côté en contact avec la figure initiale. On obtient ainsi une figure F_2 .



F_1



On procède de même avec F_2 . On obtient ainsi une nouvelle figure F_3 . En réitérant le procédé, on construit une suite (F_n) de figures. On note p_n le périmètre de F_n .

1) Tracer F_3 .

2) Exprimer en fonction de n :

a) c_n , le nombre de côtés de F_n .

b) l_n , la longueur de chaque côté de F_n .

c) p_n , le périmètre de F_n .

3) La suite (p_n) converge-t-elle?

On note A_n l'aire de F_n .

4) Exprimer A_{n+1} en fonction de A_n .

5) En déduire A_n en fonction de n .

6) Montrer que (A_n) converge et calculer sa limite.

7) Quelles réflexions vous inspire ce problème?

LIMITES DE SUITES

CORRECTION

Exercice n°1

1) Puisque $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et par suite $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$

2) Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on conclut que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

3) Puisque $-1 < -\frac{1}{4} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ et par suite $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7}$

4) Puisque $-2 < -1$, la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = (-2)^n$ n'admet pas de limite, donc (u_n) non plus

5) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5^n - 4^n = 5^n \left(1 - \frac{4^n}{5^n}\right) = 5^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

Puisque $-1 < \frac{4}{5} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1$ et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$

6) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n + 2}{8^n - 1} = \frac{3^n \left(1 + \frac{2}{3^n}\right)}{8^n \left(1 - \frac{1}{8^n}\right)} = \left(\frac{3}{8}\right)^n \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}}$

Puisque $3 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3^n} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{3^n} = 1$. Puisque $8 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8^n} = 0$ puis

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{8^n} = 1$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}} = \frac{1}{1} = 1$. Enfin, puisque $-1 < \frac{3}{8} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

Par produit, on conclut donc que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

7) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty$ donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 3} = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

8) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, donc par quotient, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$

9) On factorise : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} = \frac{n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n \left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \frac{n \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - 1}$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, on conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} = -2$, et par produit, on conclut que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$

Exercice n°2

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos n \leq 1$, donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n+1} \leq \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes », nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On pouvait également encadrer la valeur absolue de u_n : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |\cos n| \leq 1$ donc $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit, toujours grâce au même théorème, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin 2n \geq -1$, donc $n + \sin 2n \geq n - 1$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$, le théorème de minoration nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$ donc $\frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1}$, c'est-à-dire $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes », nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On pouvait également encadrer la valeur absolue de u_n : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |n + (-1)^n| \leq n + 1$ donc

$0 \leq \left| \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n + 1}{n^2 + 1}$ c'est-à-dire $0 \leq |u_n| \leq \frac{n + 1}{n^2 + 1}$ et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit,

toujours grâce au même théorème, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $n + (-1)^n \geq n - 1$. De plus $1 \leq (-1)^n + 2 \leq 3$ donc $1 \geq \frac{1}{(-1)^n + 2} \geq \frac{1}{3}$. En

multipliant entre elles les inégalités $1 \geq \frac{1}{(-1)^n + 2} \geq \frac{1}{3}$ et $n + (-1)^n \geq n - 1$ entre quantités positives, on obtient la

relation R): $u_n \geq \frac{n-1}{3}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3} = +\infty$, par application du théorème de minoration, on conclut $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice n°3

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1}} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Comme $v_n = u_n - 3$, on aura $u_n = v_n + 3 = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3}$

c) Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$. Grâce à l'égalité $u_n = v_n + 3$, on déduit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on note $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$, alors $S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{9}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]}$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 1$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{9}{2}$

Exercice n°4

Notons Q_n la propriété « $n \leq u_n$ » et montrons que la propriété Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

L'hypothèse $u_0 = 1 > 0$ assure que la propriété Q_0 est vraie

Hérédité

Supposons maintenant la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $p \leq u_p$. On déduit alors de cette inégalité $2p + 1 - p \leq 2u_p + 1 - p$, c'est-à-dire $p + 1 \leq u_{p+1}$, qui est la propriété Q_{p+1} .

On a donc $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$, ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on conclut, par minoration, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice n°5

1) Il est évident que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. On calcule successivement $u_0 = 0$,

$$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \approx 1,93,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{63} \approx 1,98$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\sqrt{u_3^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}\sqrt{63}\right)^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{1}{8}\sqrt{255} \approx 1,996$$

b) Il semble que la suite (u_n) tende vers 2

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 12) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 - 1 = \frac{1}{4}(u_n^2 - 4) = \frac{1}{4}v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Puisque $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. De l'égalité $v_n = u_n^2 - 4$ on tire $u_n = \pm\sqrt{v_n + 4}$

Mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, on a $u_n = \sqrt{v_n + 4}$, et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on déduit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{4} = 2}$

Exercice n°6

Notons Q_n la propriété « $n \leq u_n$ » et montrons que la propriété Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

L'hypothèse $u_0 = 0$, c'est-à-dire $0 \leq u_0 < 2$ assure que la propriété Q_0 est vraie

Hérédité

Supposons maintenant la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $0 \leq u_p < 2$. On déduit alors de cette inégalité $0 + 2 \leq u_p + 2 < 2 + 2$, puis, par stricte croissance de la fonction racine, $2 \leq \sqrt{u_p + 2} < \sqrt{4}$ c'est-à-dire

$0 \leq u_{p+1} < 2$, qui est la propriété Q_{p+1} . On a donc $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$, ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 2 \Leftrightarrow v_n > 0$

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{2 + u_n})(2 + \sqrt{2 + u_n})}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \quad (\text{multiplication par la quantité conjuguée})$$

$$= \frac{(2)^2 - (\sqrt{2 + u_n})^2}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{4 - (2 + u_n)}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{v_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}}$$

Et puisque pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n$, alors $2 + \sqrt{2 + u_n} \geq 2$ et ainsi $\frac{1}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \leq \frac{1}{2}$.

Par multiplication par $v_n > 0$, on conclut $v_{n+1} = \frac{v_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = v_n \times \frac{1}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \leq v_n \times \frac{1}{2}$.

Puisque $v_n > 0$, l'inégalité $v_{n+1} \leq v_n \times \frac{1}{2}$ est équivalente à $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$

Notons Q_n la propriété « $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ »

Initialisation : L'hypothèse $u_0 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 2$, et le calcul $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ assurent $v_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$ c'est-à-dire que la propriété Q_0 est vraie.

Hérédité : Supposons maintenant la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $v_p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$.

On utilise alors l'inégalité $\frac{v_{p+1}}{v_p} \leq \frac{1}{2}$, qui nous permet d'écrire :

$$\frac{v_{p+1}}{v_p} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_{p+1} \leq \frac{1}{2} \underbrace{v_p}_{\substack{\text{hypothèse de} \\ \text{récurrence}}}$$

$$\Leftrightarrow v_{p+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$$

$\Leftrightarrow v_{p+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p$, qui est la propriété Q_{p+1} . On a donc $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$, ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Puisque $v_n > 0$, on a donc $0 < v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Exercice n°7

1) a) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 4$. Notons Q_n la propriété « $0 \leq u_n < 4$ »

La propriété Q_0 est vraie d'après les données de l'énoncé. Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $0 \leq u_p < 4$. On a alors $3 \times 0 + 4 \leq 3 \times u_p + 4 < 3 \times 4 + 4$, c'est-à-dire $4 \leq 3u_p + 4 < 16$ puis $\sqrt{4} \leq \sqrt{3u_p + 4} < \sqrt{16}$ (par stricte croissance de la fonction racine). On se retrouve donc avec $0 \leq u_{p+1} < 4$, qui est la

propriété Q_{p+1} , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$. Notons Q_n la propriété « $u_n < u_{n+1}$ »

On calcule $u_1 = \sqrt{3u_0 + 4} = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$, et ainsi, puisque $u_0 < u_1$, la propriété Q_1 est vraie

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $u_p < u_{p+1}$

On a alors $3u_p + 4 < 3u_{p+1} + 4$ puis par stricte croissance de la fonction racine, $\sqrt{3u_p + 4} < \sqrt{3u_{p+1} + 4}$, c'est-à-dire $u_{p+1} < u_{p+2}$, qui est la propriété Q_{p+1} , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

c) La suite (u_n) est strictement croissante et majorée (par 4). Elle est donc convergente.

Notons L la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$, donc L vérifie l'égalité $L = \sqrt{3L + 4}$

On résout l'équation $L = \sqrt{3L + 4} \Rightarrow L^2 = 3L + 4 \Rightarrow L^2 - 3L - 4 = 0$

On trouve $L = -1$ ou $L = 4$ en calculant son discriminant.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, la limite de (u_n) ne peut être que 4. Ainsi, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4}$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} &= \frac{4 - \sqrt{3u_n + 4}}{4 - u_n} = \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{4^2 - (\sqrt{3u_n + 4})^2}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} \\ &= \frac{16 - (3u_n + 4)}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{12 - 3u_n}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{3(4 - u_n)}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \end{aligned}$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, on aura $\sqrt{3u_n + 4} \geq \sqrt{4}$ donc $4 + \sqrt{3u_n + 4} \geq 6$ donc $\frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{6}$ et en

multipliant par 3, $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{3}{6}$, donc $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4 \Leftrightarrow 4 - u_n > 0$, l'inégalité $\frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \leq \frac{1}{2}$ est équivalente à $\boxed{4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)}$

b) Démontrons maintenant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$

Notons Q_n la propriété « $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$ »

La propriété Q_0 est vraie car $\left(\frac{1}{2}\right)^0 (4 - u_0) = 4 - u_0$

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $4 - u_p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p (4 - u_0)$

En multipliant par $\frac{1}{2}$ les deux membres de l'inégalité, on obtient $\frac{1}{2}(4 - u_p) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} (4 - u_0)$, et puisque

$4 - u_{p+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_p)$, on obtient $4 - u_{p+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} (4 - u_0)$, qui est la propriété Q_{p+1} , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0) \Leftrightarrow 0 < 4 - u_n \leq 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, on applique

le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes ») pour conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4}$.

On retrouve bien le résultat du 1) c)

c) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < 4 - u_n \leq 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on obtient $0 < n^2 (4 - u_n) \leq \frac{4n^2}{2^n}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{2^n} = 0$ (par croissance comparée), on applique le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes ») pour conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (4 - u_n) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$.

Exercice n°8

1) Notons $P(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 3$ » et démontrons par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : La propriété est vraie pour $n=0$ puisque $u_0 = 0 \Rightarrow 0 \leq u_0 \leq 3$

Hérédité : Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n , c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq 3$.

On écrit alors successivement :

$$0 \leq u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow 2 \times 0 + 3 \leq 2u_n + 3 \leq 2 \times 3 + 3$$

c'est-à-dire $3 \leq 2u_n + 3 \leq 9$, et en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on obtient

$\sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq \sqrt{9}$, c'est-à-dire $\sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3$, ce qui prouve que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$

2) Notons $P(n)$ la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$ » et démontrons par récurrence sur n que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

La propriété est vraie pour $n=0$ puisque $u_1 = \sqrt{2u_0 + 3} = \sqrt{3} \Rightarrow u_0 \leq u_1$

Hérédité :

Supposons la propriété $P(n)$ vraie pour un entier n , c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$.

On écrit alors successivement :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

$$\Rightarrow 2 \times u_n + 3 \leq 2u_{n+1} + 3$$

et utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on obtient $\sqrt{2 \times u_n + 3} \leq \sqrt{2u_{n+1} + 3}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui prouve que la propriété $P(n+1)$ est vraie.

En conclusion, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire : La suite u est strictement croissante.

3) Puisque u est strictement croissante et majorée, elle converge vers une limite l .

Puisque pour tout entier n , $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \rightarrow \sqrt{2x+3}$, qui est continue sur $[0; +\infty[$, la limite l vérifie $l = f(l)$. On résout l'équation $l = \sqrt{2l+3} \Leftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0$ et $l > 0$, en calculant le discriminant de l'équation. On

obtient $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes. $l_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$ et

$l_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$. La condition $l > 0$ (et par ailleurs le fait que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$) entraîne le fait que :

la limite de la suite u est 3.

Exercice n°9

1) On calcule successivement $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3u_0 + 2}{u_0 + 2} = \frac{3 \times 1 + 2}{1 + 2} = \frac{5}{3}$, $u_2 = \frac{3u_1 + 2}{u_1 + 2} = \frac{3 \times \frac{5}{3} + 2}{\frac{5}{3} + 2} = \frac{7}{\frac{11}{3}} = \frac{21}{11}$ et

$$u_3 = \frac{3u_2 + 2}{u_2 + 2} = \frac{3 \times \frac{21}{11} + 2}{\frac{21}{11} + 2} = \frac{\frac{85}{11}}{\frac{43}{11}} = \frac{85}{43} = \frac{85}{43} \times \frac{11}{43} = \frac{85}{43}$$

2) Notons Q_n la propriété « $0 < u_n < 2$ ». La propriété Q_0 est vraie d'après les hypothèse de l'énoncé.

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $0 < u_p < 2$.

Alors $u_{p+1} - 2 = \frac{3u_p + 2}{u_p + 2} - 2 = \frac{3u_p + 2 - 2(u_p + 2)}{u_p + 2} = \frac{u_p - 2}{u_p + 2}$. Puisque $0 < u_p < 2$, on peut en déduire que $u_{p+1} - 2 < 0$,

donc que $u_{p+1} < 2$. D'autre part $u_{p+1} > 0$ car $u_p > 0$.

Ainsi, on trouve la propriété Q_{p+1} , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence

3) On calcule le discriminant du polynôme $P(x) = -x^2 + x + 2$: $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$. Le polynôme admet deux racines distinctes réelles qui sont $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = -1$ et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 2$

D'après la règle du signe d'un trinôme du second degré, $P(x) < 0$ sur $]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$, $P(x) > 0$ sur $]1; 2[$

4) On calcule $u_{n+1} - u_n$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$ et puisque pour tout $x \in [0, 2]$, $-x^2 + x + 2 \geq 0$, on substitue u_n à x

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

5) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on calcule $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3u_n + 2 - 2(u_n + 2)}{u_n + 2}}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{(u_n + 2)(u_n - 2)}$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 2$, on peut simplifier $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{(u_n + 2)(u_n - 2)} = \frac{1}{u_n + 2}$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$, on aura $2 < u_n + 2 < 4$ donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{2}$, ainsi que $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} > 0$, donc

$$\frac{|u_{n+1} - 2|}{|u_n - 2|} = \left| \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} \right| = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} \text{ car } \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} > 0. \text{ Finalement, } \frac{|u_{n+1} - 2|}{|u_n - 2|} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2} |u_n - 2|$$

6) Notons Q_n la propriété « $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$ »

La propriété Q_0 est vraie d'après les hypothèse de l'énoncé, car $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - 2| = |u_0 - 2|$

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, à savoir $|u_p - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^p |u_0 - 2|$.

Alors en multipliant chaque membre de l'inégalité $|u_p - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^p |u_0 - 2|$ par $\frac{1}{2}$, on obtient $\frac{1}{2} |u_p - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} |u_0 - 2|$

Et puisque $|u_{p+1} - 2| < \frac{1}{2} |u_p - 2|$, on en déduit $|u_{p+1} - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} |u_0 - 2|$, qui est la propriété Q_{p+1}

Ceci achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

7) La suite (u_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Pour déterminer sa limite, on peut :

- soit utiliser la propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$. Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 2| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

- soit noter sa limite L. Puisque (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ qui est continue sur $[0, 2]$, la

limite L vérifie $f(L) = L \Leftrightarrow \frac{3L+2}{L+2} = L \Leftrightarrow 3L+2 = L(L+2) \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0$. En calculant son discriminant, on

résout cette équation. On trouve $L = -1$ ou 2. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$, la limite ne peut être que $\boxed{L = 2}$

Exercice n°10

1) De l'égalité $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, on en déduit $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$. Ainsi, $u_0 = 2 \cos \theta$,

$$\text{puis } u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2 \cos \theta} = \sqrt{2(1+\cos \theta)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

Puisque $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$, et ainsi $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$ donc $u_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}$

$$\text{Ensuite } u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2 \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1+\cos \frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2^2}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2^2} \right|$$

Puisque $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \leq \frac{\theta}{2^2} \leq \frac{\pi}{8}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \geq 0$, et ainsi $\left| \cos \frac{\theta}{2^2} \right| = \cos \frac{\theta}{2^2}$ donc $u_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2^2}$

$$\text{Enfin, } u_3 = \sqrt{2+u_2} = \sqrt{2+2 \cos \frac{\theta}{2^2}} = \sqrt{2\left(1+\cos \frac{\theta}{2^2}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \frac{\theta}{2^2}} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2^3}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^3}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2^3} \right|$$

Puisque $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \leq \frac{\theta}{2^3} \leq \frac{\pi}{16}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right) \geq 0$, et ainsi $\left| \cos \frac{\theta}{2^3} \right| = \cos \frac{\theta}{2^3}$ donc $u_3 = 2 \cos \frac{\theta}{2^3}$

2) Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

Notons Q_n la propriété « $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ ». La propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3$ d'après les calculs ci-dessus

Supposons la propriété Q_p vraie pour un certain entier $p \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_p = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$

Alors, puisque $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$, on calcule :

$$u_{p+1} = \sqrt{2+u_p} = \sqrt{2+2 \cos \frac{\theta}{2^p}} = \sqrt{2\left(1+\cos \frac{\theta}{2^p}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \frac{\theta}{2^p}} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2^{p+1}}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^{p+1}}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2^{p+1}} \right|$$

Puisque $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on aura $0 \leq \frac{\theta}{2^{p+1}} \leq \frac{\pi}{2^p}$ donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right) \geq 0$, et ainsi $\left| \cos \frac{\theta}{2^{p+1}} \right| = \cos \frac{\theta}{2^{p+1}}$ donc $u_{p+1} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{p+1}}$

C'est la propriété Q_{p+1} , qui achève la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

3) Puisque $2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$

4) Par composition avec la fonction cosinus qui est continue en 0, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \cos(0) = 1$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2. \text{ Ainsi } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

Exercice n°11

1) Démontrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Notons $P(n)$ la propriété « $u_n > 0$ »

Initialisation : La propriété est vraie pour $n=0$ d'après l'énoncé.

Hérédité : Supposons maintenant que $P(k)$ soit vraie pour un certain entier $k > 0$. Alors :

$$u_k > 0 \Rightarrow \frac{3}{u_k} > 0 \Rightarrow u_k + \frac{3}{u_k} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(u_k + \frac{3}{u_k} \right) > 0, \text{ c'est-à-dire } u_{k+1} > 0. \text{ Ainsi } P(k) \Rightarrow P(k+1). \text{ L'hérédité est ainsi}$$

démontrée. En conclusion, la propriété $P(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour que la suite soit stationnaire, il est nécessaire et suffisant que $u_0 = \sqrt{3}$.

En effet, supposons que $u_0 = \sqrt{3}$. Montrons alors que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{3}$. Par récurrence sur n , la propriété est vraie, par hypothèse, pour $n=0$, et si on suppose que $u_k = \sqrt{3}$ pour une valeur de k donnée, alors

$$u_{k+1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}, \text{ ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.}$$

Réciproquement, si la suite est stationnaire, cela signifie que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0$.

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right) - u_n = -\frac{1}{2} u_n + \frac{3}{2u_n} = \frac{-u_n^2 + 3}{2u_n}. \text{ Ainsi si la suite est stationnaire, cela entraîne que}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{3}. \text{ En particulier, pour } n=0, u_0 = \sqrt{3}$$

En conclusion, seule la valeur $u_0 = \sqrt{3}$ rend la suite stationnaire

$$2) \text{ a) } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on calcule } u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right) - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} \left[(u_n^2 + 3) - 2\sqrt{3}u_n \right] = \frac{1}{2u_n} \left[(u_n - \sqrt{3})^2 \right]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on calcule } u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right) + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} \left[(u_n^2 + 3) + 2\sqrt{3}u_n \right] = \frac{1}{2u_n} \left[(u_n + \sqrt{3})^2 \right]$$

$$\text{b) } \forall n \geq 1, \text{ on reprend le calcul de } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right) - u_n = -\frac{1}{2} u_n + \frac{3}{2u_n} = \frac{-u_n^2 + 3}{2u_n}$$

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} \left[(u_n - \sqrt{3})^2 \right]$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ (question 1) et

$(u_n - \sqrt{3})^2 \geq 0$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \sqrt{3}$. De plus, cette inégalité est en fait stricte car s'il existe un indice k

tel que $u_k = \sqrt{3}$, alors pour tout $n \geq k$, on aurait $u_n = \sqrt{3}$ (démonstration par récurrence de la question 1). La suite serait donc stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui est exclu puisque $u_0 = 1 \neq \sqrt{3}$. En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > \sqrt{3}$, ce

qui se réécrit $\forall n \geq 1, u_n > \sqrt{3} \Rightarrow 3 - u_n^2 < 0$. Ainsi $\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$, ce qui assure la décroissance de la

suite pour $\forall n \geq 1$.

c) La suite est décroissante pour $\forall n \geq 1$ et minorée par $\sqrt{3}$ (puisque $\forall n \geq 1, u_n > \sqrt{3}$) donc converge vers une limite l

qui vérifie $l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{3}{l} \right) \Leftrightarrow l = \frac{3}{l} \Leftrightarrow l^2 = 3$. Des deux solutions de cette équation ($l = -\sqrt{3}$ ou $l = \sqrt{3}$), seule la deuxième

est possible car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, donc nécessairement, $l \geq 0$. Ainsi, la suite converge vers $\sqrt{3}$

$$3) \text{ a) } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on calcule } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2u_n} \left[(u_n - \sqrt{3})^2 \right]}{\frac{1}{2u_n} \left[(u_n + \sqrt{3})^2 \right]} = \frac{(u_n - \sqrt{3})^2}{(u_n + \sqrt{3})^2} = \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \right)^2 = v_n^2$$

Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 1, v_n = (v_1)^{2^{n-1}}$.

La propriété est vraie pour $n=1$, puisque $(v_1)^{2^{1-1}} = (v_1)^{2^0} = (v_1)^1 = v_1$. Supposons que pour un entier $k \geq 1$ fixé, on ait $v_k = (v_1)^{2^{k-1}}$, alors puisque $v_{k+1} = v_k^2$, on aura $v_{k+1} = (v_k)^2 = \left((v_1)^{2^{k-1}} \right)^2 = (v_1)^{2^{k-1} \times 2} = (v_1)^{2^{k-1+1}} = (v_1)^{2^k}$, ce qui achève la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

b) Puisque $v_1 = \frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$, on a $-1 < v_1 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_1)^{2^{n-1}} = 0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$. En utilisant

l'expression de la suite v en fonction de la suite u , on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} = 0$. Mais puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + \sqrt{3} > 0$, on a

l'équivalence $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{3} = 0$ et on retrouve bien $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}}$.

Exercice n°12

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{1}{12}(3u_n + 9v_n) - \frac{1}{12}(4u_n + 8v_n) \\ &= \frac{1}{12}[(3u_n + 9v_n) - (4u_n + 8v_n)] = \frac{1}{12}[3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n] = \frac{1}{12}[-u_n + v_n] = \frac{1}{12}w_n \end{aligned}$$

La suite w est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 11$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$, ce qui assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$

b) Puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - \frac{3}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n - 3u_n) = \frac{1}{3}(2v_n - 2u_n) = \frac{2}{3}w_n$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$. La suite u est donc (strictement) croissante

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{4}{4}v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n - 4v_n) = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = -\frac{1}{4}w_n$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n < 0 \Leftrightarrow v_{n+1} < v_n$. La suite v est donc (strictement) décroissante

c) Puisque la suite u est croissante, tous les termes u_n sont supérieurs ou égaux au premier terme u_0

Puisque la suite v est décroissante, tous les termes v_n sont inférieurs ou égaux au premier terme v_0

Enfin, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$, ceci se traduit par l'inégalité $u_n \leq v_n$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0}$

3) Puisque la suite u est croissante, la suite v est décroissante, et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$, les deux suites u et v sont adjacentes, donc sont convergentes vers une même limite l

4) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3 \times \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) + 8 \times \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) \\ &= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n \end{aligned}$$

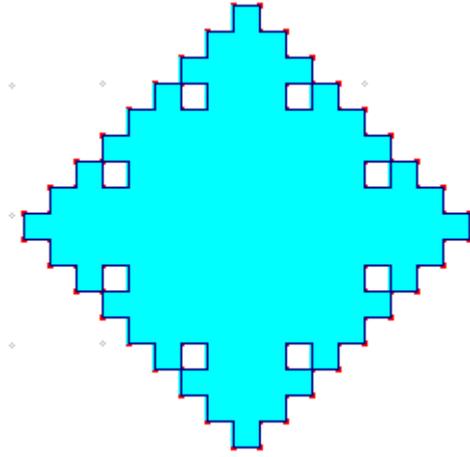
La suite (t_n) est donc constante. Cette constante est égale à son premier terme !

On calcule $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 \times 1 + 8 \times 12 = 99$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = 99$

b) Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{3u_n + 8v_n}_{t_n} = 3l + 8l = 11l$ donc $11l = 99 \Leftrightarrow \boxed{l = 9}$

Exercice n°13



1) F_3 :

2) a) (c_n) est une suite géométrique de premier terme $c_1 = 4$ et de raison 5 donc $c_n = 4 \times 5^{n-1}$.

b) (l_n) est une suite géométrique de premier terme $l_1 = 1$ et de raison $\frac{1}{3}$ donc $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

c) $p_n = c_n l_n$ donc $p_n = 4 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

3) $\frac{5}{3} > 1$ donc (p_n) diverge.

4) A l'étape $n+1$, on ajoute c_n carrés d'aire l_{n+1}^2 . D'où $A_{n+1} = A_n + c_n l_{n+1}^2 = A_n + \frac{4}{9} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$.

$$5) A_n = 1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \dots + \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} = 1 + \frac{4}{9} \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n}{1 - \frac{5}{9}} \right] = 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n.$$

6) $\frac{5}{9} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 2$.

7) La "figure limite" a un périmètre infini mais une aire finie.