

Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

TD : NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

Exercice 2 : soient dans le plan complexe les points : $A(1+i)$ et $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A , B et C sont alignés.

Exercice 3 : soient dans le plan complexe les points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1) Déterminer les affixes des points A et B et C ?

2) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

3) Déterminer l'affixe de I , milieu de $[AB]$.

4) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 4 : soient dans le plan complexe les points : A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$$z_A = 1+i \text{ et } z_B = 3+2i \text{ et } z_C = 2-i \text{ et } z_D = -2i$$

$$\text{et } z_E = 2$$

1) Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de I milieu de $[AB]$.

3) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

4) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme

Exercice 5 : Démontrer que $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est un nombre réel.

Exercice 6 : on pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$

1) Montrer que : $j^2 = \bar{j}$

2) Démontrer que : $S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Exercice 7 : soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \notin \mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}) |1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Exercice 8 : $z \in \mathbb{C}$

Ecrire en fonction de \bar{z} le conjugué des nombres complexes suivants :

$$1) Z_1 = (2+i)(5-i) \quad 2) Z_2 = 2z+5i \quad 3) Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

Exercice 9 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1) 2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad 2) z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

Exercice 10 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = (z-2i)(\bar{z}-1)$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Exercice11 :A) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2z - 3\bar{z} + 1 + 2i = 0$ 2) $z + (1-i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$

3) $(3+i)z + \bar{z} = -i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) $(E1) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$

2) $(E2) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$

Exercice12 : Démontrer que :

$$S = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}$$
 est un nombre réel $\forall n \in \mathbb{Z}$

Exercice13 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = 2iz - \bar{z}$ Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ 1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U 2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel**Exercice 14 :** calculer le module des nombres

complexes suivants : 1) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $z' = 3 - 4i$

Exercice15 :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1) $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ 2) $z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i$ 3) $z_3 = \frac{1}{1+i}$

4) $z_4 = x$ où $x \in \mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1) $u_1 = \frac{2+5i}{1+3i}$ 2) $u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $A(z)$; $B(\bar{z})$ et $C(\frac{1}{z})$ soit alignés.**Exercice16 :** calculer le module des nombres complexes suivants : 1) $z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$

2) $z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i)$ 3) $z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3$

Exercice17 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; les points A, B et Cont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Exercice18 : Déterminer l'ensemble (Δ) despoints M d'affixe z tels que : $|z-1-2i| = |z-7+2i|$ **Exercice19:** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|z-3+i| = 5$

b) $|z-4-5i| = |z+2|$

Exercice20 : Déterminer l'ensemble (C) des pointsM d'affixe z tels que : $|z-2i| = 3$ **Exercice21 :** Déterminer l'ensemble (Δ) despoints M d'affixe z tels que : $|iz+3| = \left|\frac{1}{i}z - 4i + 1\right|$ **Exercice22 :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$;on considère les points A ; B ; C ; D ; E ; F qui ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = -2i$ et $z_C = 2 + 2i$ et

$z_D = 3i$ et $z_E = -3$ et $z_F = -2 + 2i$

1) Représenter les points A ; B ; C ; D ; E ; F dans Le plan complexe

2) on utilisant la représentations déterminer

l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et z_D et

z_E et z_F

Exercice23 : Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z_1 = \sqrt{3} + i$ 2) $z_2 = 1 - i$ 3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

4) $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ 5) $z = 7$ 6) $z = -12$

Exercice24: Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec

$\theta \in]-\pi; \pi[- \{0\}$

1) $z_1 = \sin \theta + i \cos \theta$ 2) $z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$

3) $z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Exercice25 : on considère les nombres

complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et

$U = z_1^6 \times z_2^2$

1) Ecrivez les nombres complexes z_1 ; z_2 et Z et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z Sous sa forme algébrique

puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice26 : Ecrire le complexe $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8$

Sous sa forme algébrique

Exercice 27 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $z = -5 - 5i$ 3) $z = -6 + 6\sqrt{3}i$

4) $z = (3 - 3i)^4$ 5) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ 6) $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

7) $z = (\sqrt{3} + 3i) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 8) $z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

9) $z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

Exercice28 : Déterminer les racines carrées de

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Exercice29 : Soit le complexe :

$u = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

Exercice30 : Soient A , B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A = 3 + 5i$,

$z_B = 3 - 5i$ et $z_C = 7 + 3i$

1) montrer que : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2) montrer que ABC est un triangle rectangle et que : $BC = 2AC$

Exercice31 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$;

Soient A , B et C des points dans le plan complexe

d'affixes respectifs $a = 2i$, $b = \sqrt{2}(1+i)$ et

$c = a + b$

1) Montrer que $OBCA$ est un losange

2) Montrer que : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$

Exercice32 : Soient A , B et C des points dans le

plan complexe d'affixes respectifs $a = 2 + i$,

$b = 3 + 2i$ et $c = 5 - i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $(\overline{AB}; \overline{AC})$

Calculer $\tan \alpha$

Exercice33 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points

A , B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + i$

et $z_3 = 1 - i$

1) Placer dans le repère \mathcal{R} les points A , B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ et déterminer une mesure de

l'angle $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que :

$$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme

algébrique puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice34 : 1° Vérifier que les points $A(5+3i)$; $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés

2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et $N(1-i)$ sont alignés ?

Exercice35 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} \text{ Soit un imaginaire pur.}$$

Exercices36 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$\text{que : } \left| \frac{z - 2}{z + 1 - i} \right| = 1$$

Exercice37 : soit a et b et c des nombres

complexes tels que : $|a| = |b| = |c| = 1$ et $a \neq c$ et $b \neq c$

$$1) \text{ Montrer que : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ en déduire que : } \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien



Bon courage

Exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

Exercices avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

Solution : 1)

$$z_1 = -6 + 5i = a + bi \text{ donc } \operatorname{Re}(z_1) = -6 \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = 5$$

$$2) z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$$

$$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$$

car $\operatorname{Im}(z_2) = 0$

$$3) z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$$

$$z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5} \text{ donc } \operatorname{Re}(z_3) = \frac{3}{5} \text{ et } \operatorname{Im}(z_3) = -\frac{4}{5}$$

$$4) z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$$

$$5) z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (1^2 + 2i \times 1 + i^2)^5 = (2i)^5$$

$$z_5 = (2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times (i^2)^2 \times i = 32i$$

est un imaginaire pur car $\operatorname{Re}(z_5) = 0$

Exercice 2 : soient dans le plan complexe les

points : $A(1+i)$ et $B\left(\frac{1}{2} + 2i\right)$ et $C(-1-i)$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Solutions :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2} + 2i - i}{-1 - i - i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-1 - 2i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-2\left(\frac{1}{2} + i\right)} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc : les les points A, B et C sont alignés

Exercice 3 : soient dans le plan complexe les

points : $A(2;-3)$ et $B(1;1)$ et $C(1;2)$

1) Déterminer les affixes des points A et B et C ?

2) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

3) Déterminer l'affixe de I , milieu de $[AB]$.

4) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solutions : 1) l'affixe du point A est $z_A = 2 - 3i$

l'affixe du point B est $z_B = 1 + i$

l'affixe du point C est $z_C = 1 + 2i$

$$2) \operatorname{aff}(\overrightarrow{AB}) = \operatorname{aff}(B) - \operatorname{aff}(A) = z_B - z_A$$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (1+i) - (2-3i) = -1+4i$$

$$3) z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2-3i+1+i}{2} = \frac{3-2i}{2} = \frac{3}{2} - i$$

$$4) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1+2i) - (2-3i)}{(1+i) - (2-3i)} = \frac{-1+5i}{-1+4i}$$

$$= \frac{(-1+5i)(-1-4i)}{(-1-4i)(-1+4i)} = \frac{1+4i-5i+20}{(-1)^2 - (4i)^2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{21-i}{17} = \frac{21}{17} - \frac{1}{17}i \notin \mathbb{R}$$

Donc : les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$?

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2z_A - 1z_B + 3z_C}{2-1+3}$$

$$z_G = \frac{2(2-3i) - 1(1+i) + 3(1+2i)}{2-1+3} = \frac{6-i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$$

6) ABCD est un parallélogramme si et seulement

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire : $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$$z_D = 1 + 2i + 2 - 3i - 1 - i = 2 - 2i$$

Exercice 4 : soient dans le plan complexe les points : A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$$z_A = 1 + i \text{ et } z_B = 3 + 2i \text{ et } z_C = 2 - i \text{ et } z_D = -2i$$

et $z_E = 2$

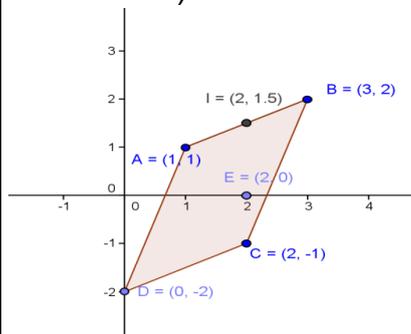
1) Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de I milieu de [AB].

3) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

4) montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Solution : 1)



I milieu de [AB]. Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc $z_I - z_A = z_B - z_I$

$$\text{Donc : } z_I = \frac{z_B + z_A}{2} \text{ donc : } z_I = \frac{3 + 2i + 1 + i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$$

$$\text{Donc : } I\left(2; \frac{3}{2}\right)$$

3) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (1 + i) = 3 + 2i - 1 - i = 2 + i$

4) il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

On a : $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + i$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2 - i - (-2i) = 2 + i$$

Donc : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$ par suite : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Exercice 5 : Démontrer que $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est

un nombre réel.

Solution : On a :

$$\overline{S} = \overline{(1+i)^5 + (1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5}$$

$$\overline{S} = (1-i)^5 + (1+i)^5 = S$$

S est donc bien un nombre réel.

Exercice 6 : on pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

et $S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$

1) montrer que : $j^2 = \bar{j}$

2) Démontrer que : $S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Solution : 1)

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

2) il suffit de montrer que : $S + \overline{S} = 0$

$$S + \overline{S} = j^{2n} - j^n + \overline{j^{2n} - j^n} = (j^2)^n - j^n + \overline{(j^2)^n - j^n}$$

$$S + \overline{S} = (\bar{j})^n - j^n + \overline{(\bar{j})^n - j^n} = (\bar{j})^n - j^n + \overline{(\bar{j})^n} - \overline{j^n}$$

$$S + \overline{S} = \bar{j}^n - j^n + j^n - \bar{j}^n = 0$$

S est donc bien un imaginaire pur

Exercice 7 : soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \notin \mathbb{R}$

Montrer que : $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Solution : 1) soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z|$

$$\text{Donc : } |1+uz|^2 = |1+\bar{u} \cdot z|^2$$

$$\text{Donc : } (1+uz)\overline{(1+uz)} = (1+\bar{u} \cdot z)\overline{(1+\bar{u} \cdot z)}$$

$$\text{Donc : } (1+uz)(1+\bar{u}\bar{z}) = (1+\bar{u} \cdot z)(1+u \cdot \bar{z}) \text{ Car : } \bar{\bar{u}} = u$$

$$\text{Donc : } 1+uz + \bar{u}\bar{z} + u\bar{u}z\bar{z} = 1+u\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{u}z\bar{z}$$

Donc : $uz + \bar{u}\bar{z} = \bar{u}\bar{z} + \bar{u}\bar{z}$

Donc : $(u - \bar{u})z + (\bar{u} - u)\bar{z} = 0$

Donc : $(u - \bar{u})(z - \bar{z}) = 0$

Et puisque : $u - \bar{u} \neq 0$ car $u \notin \mathbb{R}$

Donc : $z - \bar{z} = 0$ Donc : $z = \bar{z}$

Donc : $z \in \mathbb{R}$

Exercice8: $z \in \mathbb{C}$

Ecrire en fonction de \bar{z} le conjugué des nombres complexes suivants :

1) $Z_1 = (2+i)(5-i)$ 2) $Z_2 = 2z + 5i$ 3) $Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$

Solution :

1) $\bar{Z}_1 = \overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(5-i)} = (2-i)(5+i)$

2) $\bar{Z}_2 = \overline{2z + 5i} = \overline{2z} + \overline{5i} = 2\bar{z} - 5i$

3) $\bar{Z}_3 = \overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)} = \frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}} = \frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$

Exercice 9: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2z + i\bar{z} = 5 - 4i$ 2) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$

Solution :1) $z \in \mathbb{C}$

donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \Leftrightarrow 2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i$

$(2x + y) + i(2y + x) = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x + 2x + y = 8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{3}$

Donc : $x = \frac{14}{3}$ par suite: $z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$

Donc : $S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$

2) $z \in \mathbb{C}$ donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$z = 2\bar{z} - 2 + 6i \Leftrightarrow x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$

Donc : $S = \{2 + 2i\}$

Exercice10 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Solution :1) $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $U = (x + yi - 2i)(x - yi - 1)$

Donc : $U = (x + i(y - 2))((x - 1) - yi)$

Donc : $U = (x^2 + y^2 - x - 2y) + i(-y - 2x + 2)$

Donc : $\text{Re}(U) = x^2 + y^2 - x - 2y$ et $\text{Im}(U) = -y - 2x + 2$

2) U est réel ssi $\text{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$

3) U est imaginaire pur ssi $\text{Re}(U) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times 1y + 1^2 - 1^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur est le cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$

et de rayon : $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Exercice11 :

A) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $2z - 3\bar{z} + 1 + 2i = 0$ 2) $z + (1-i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$

3) $(3+i)z + \bar{z} = -i$

B) Déterminer les ensembles suivants :

1) $(E1) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$

2) $(E2) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$

Exercice12 : Démontrer que :

$S = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}$ est un nombre réel $\forall n \in \mathbb{Z}$

Solution : On a :

$(i - \sqrt{3})^{2n+1} = (-(\sqrt{3} - i))^{2n+1} = (-1)^{2n+1} \times (\sqrt{3} - i)^{2n+1}$

Donc : $(i - \sqrt{3})^{2n+1} = -(\sqrt{3} - i)^{2n+1}$ car $(-1)^{2n+1} = -1$

Donc : $S = (\sqrt{3} + i)^{2n+1} + (\sqrt{3} - i)^{2n+1}$

$\bar{S} = \overline{(\sqrt{3} + i)^{2n+1} - (i - \sqrt{3})^{2n+1}} = \overline{(\sqrt{3} + i)^{2n+1}} - \overline{(i - \sqrt{3})^{2n+1}}$

$\bar{S} = (\overline{\sqrt{3} + i})^{2n+1} - \overline{(i - \sqrt{3})^{2n+1}} = (\sqrt{3} - i)^{2n+1} + (\sqrt{3} + i)^{2n+1}$

Donc : $\bar{S} = S$

donc S est bien un nombre réel.

Exercice13 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre

complexe z et on pose : $U = 2iz - \bar{z}$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Solution : 1) $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc : $U = 2i(x + yi) - (x - yi) = 2ix - 2y - x + yi$

Donc : $U = (-2y - x) + i(y + 2x)$

Donc : $\text{Re}(U) = -2y - x$ et $\text{Im}(U) = y + 2x$

2) U est réel ssi $\text{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : y + 2x = 0$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$(\Delta) : y = -2x$

Exercice 14 : calculer le module des nombres

complexes suivants : 1) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $z' = 3 - 4i$

Solution :

$|z| = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$|z'| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; |-2i| = \sqrt{(-2)^2} = 2$

Exercice15 :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

1) $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ 2) $z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i$ 3) $z_2 = \frac{1}{1+i}$

4) $z_4 = x$ où $x \in \mathbb{R}$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1) $u_1 = \frac{2+5i}{1+3i}$ 2) $u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$ 3) $u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : A(z) ; B(\bar{z}) et C($\frac{1}{z}$) soit alignés.

Exercice16 : calculer le module des nombres

complexes suivants : 1) $z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$

$$2) z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) \quad 3) z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^3$$

Solution :

$$1) |z_1| = |-5(1+i\sqrt{3})| = |-5| |1+i\sqrt{3}| = 5\sqrt{1+3} = 10$$

$$2) |z_2| = |(1+i)(\sqrt{3}-i)| = |1+i| \times |\sqrt{3}-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$3) |z_3| = \left| \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^3 \right| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right|^3 = \left(\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right| \right)^3 = \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|} \right)^3$$

$$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} \right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Exercice17 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; les points A, B et C

ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Solution : il suffit de montrer que : $AC = AB = BC$

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + \sqrt{3}i - 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i| = |2| = 2$$

Donc : $AC = AB = BC$

Exercice18 : Déterminer l'ensemble (Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|z-1-2i| = |z-7+2i|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow |z-(1+2i)| = |z-(7-2i)|$$

On pose : $A(z_A = 1+2i)$ et $B(z_B = 7-2i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du

segment $[AB]$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$|z-1-2i| = |z-7+2i| \Leftrightarrow |x+yi-1-2i| = |x+yi-7+2i|$$

$$\Leftrightarrow |x-1+i(y-2)| = |x-7+i(y+2)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 12x - 8y - 48 = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : 3x - 2y - 12 = 0$$

Exercice19: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|z-3+i| = 5$

$$b) |z-4-5i| = |z+2|$$

Solution :

a) Soit A le point d'affixe $3-i$

$$|z-3+i| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5.

b) Soient B et C les points d'affixes $4+5i$ et -2

$$|z-4-5i| = |z+2| \Leftrightarrow BM = CM$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[BC]$

Exercice20 : Déterminer l'ensemble (C) des points

M d'affixe z tels que : $|z-2i| = 3$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|z-2i| = 3 \text{ On pose : } A(z_A = 2i)$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0;2)$ et de rayon : $R=3$

Methode1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$|z-2i| = 3 \Leftrightarrow |x+yi-2i| = 3 \Leftrightarrow |x+i(y-2)| = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

A(0;2) et de rayon : $R=3$

Exercice21 : Déterminer l'ensemble(Δ) des

points M d'affixe z tels que : $|iz + 3| = \left| \frac{1}{i} z - 4i + 1 \right|$

Solution :

Methode1 : Méthode géométrique :

$$|iz + 3| = \left| \frac{1}{i} z - 4i + 1 \right| \Leftrightarrow |i(z - 3i)| = \left| \frac{1}{i}(z + 4 + i) \right|$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z + 4 + i| \text{ car } |i| = \left| \frac{1}{i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z - (-4 - i)|$$

On pose : A($z_A = 3i$) et B($z_B = -4 - i$)

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du

segment $[AB]$

Exercice22 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé ($O; \vec{u}; \vec{v}$);

on considère les points A ; B ;C ;D ;E ;F qui ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = -2i$ et $z_C = 2 + 2i$ et

$z_D = 3i$ et $z_E = -3$ et $z_F = -2 + 2i$

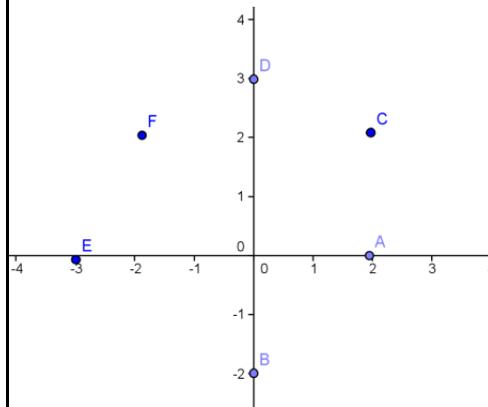
1) Représenter les points A ; B ;C ;D ;E ;F dans Le plan complexe

2) on utilisant la représentations déterminer

l'argument des complexe : z_A et z_B et z_C et z_D et

z_E et z_F

Solution :1)



$$2) \arg z_A = 0[2\pi] \text{ et } \arg z_B = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg z_C = \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ et } \arg z_D = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg z_E = \pi[2\pi] \text{ et } \arg z_F = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

Exercice23 : Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

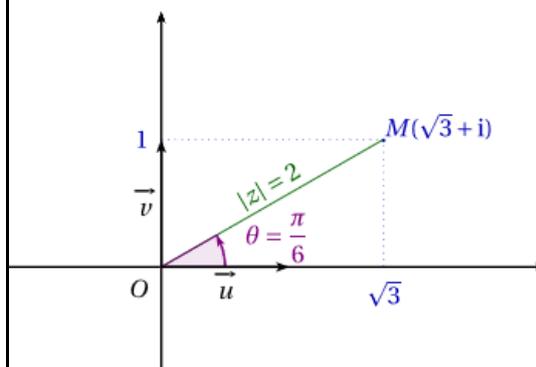
$$1) z_1 = \sqrt{3} + i \quad 2) z_2 = 1 - i \quad 3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

$$4) z_3 = -1 - \sqrt{3}i \quad 5) z = 7 \quad 6) z = -12$$

Solution :1) $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$



$$2) |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Et on a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ donc :

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \quad \arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i \quad |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Et on a : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc :

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$4) z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$$z_4 = 2 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$$

Exercice24: Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec

$$\theta \in]-\pi; \pi[- \{0\}$$

$$1) z_1 = \sin \theta + i \cos \theta \quad 2) z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$$

$$3) z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Solution : 1)

$$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta = 1 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre

complexe z_1 donc $|z_1| = 1$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$

$$2) z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

• Si $\theta \in]0; \pi[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre

complexe z_2 est :

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi]$$

• Si $\theta \in]-\pi; 0[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi + \theta}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + \theta}{2} \right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre

complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta + \pi}{2} [2\pi]$$

$$3) z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

• Si $\theta \in]0; \pi[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre

complexe z_3 est : $z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

• Si $\theta \in]-\pi; 0[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

Exercice 25 : on considère les nombres

complexes : $z_1 = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = 1 - i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$ et

$$U = z_1^6 \times z_2^2$$

1) Ecrivez les nombres complexes z_1 ; z_2 et Z et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z sous sa forme algébrique

puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Solution : 1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Donc : } \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

$$\text{Donc : } z_1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]$$

On a : $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]^6 \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$U = \left[2^6; -\pi \right] \times \left[2; -\frac{\pi}{2} \right] = \left[2^7; -\pi + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$U = 2^7 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} \right) \right) = 2^7 (0 + 1i) = 2^7 i$$

2)

$$Z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i - i + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 26 : Ecrire le complexe $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8$

Sous sa forme algébrique

Solution : On va d'abord écrire $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$

Sous la forme trigonométrique

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Donc : } Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8 = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3} \right]^8$$

$$Z = \left[\sqrt{2^8}; \frac{8\pi}{3} \right] = 16 \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \frac{6\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi + 2\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Z = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Exercice 27 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1) $z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 2) $z = -5 - 5i$ 3) $z = -6 + 6\sqrt{3}i$

4) $z = (3 - 3i)^4$ 5) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ 6) $z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

7) $z = (\sqrt{3} + 3i) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 8) $z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

9) $z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$

Exercice 28 : Déterminer les racines carrées de

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{Solution :}$$

On a : $|z| = 1$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

Donc les racines carrées de z sont :

$$u_1 = \left[1; \frac{\pi}{12} \right] = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad u_2 = -u_1$$

Exercice 29 : Soit le complexe :

$$u = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

Exercice 30 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A = 3 + 5i$,

$$z_B = 3 - 5i \quad \text{et} \quad z_C = 7 + 3i$$

1) montrer que : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$

2) montrer que ABC est un triangle rectangle et que : $BC = 2AC$

Solution : 1) $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \frac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = 2i$

$$\overline{(\overline{CA}; \overline{CB})} \equiv \arg \left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) [2\pi]$$

$$\overline{(\overline{CA}; \overline{CB})} \equiv \arg(2i) [2\pi]$$

$$\overline{(\overline{CA}; \overline{CB})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Donc : ABC est un triangle rectangle en C

On a : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$ donc : $\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = |2i|$

Donc : $\frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2$ donc : $\frac{BC}{AC} = 2$

Donc : $BC = 2AC$

Exercice 31 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a = 2i$, $b = \sqrt{2}(1+i)$ et

$$c = a + b$$

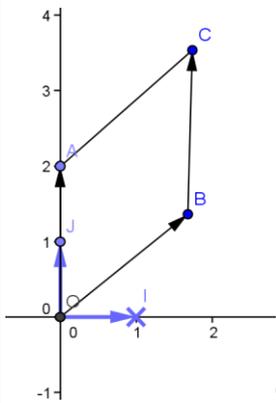
1) Montrer que $OBCA$ est un losange

2) Montrer que : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$

Solution :

1) On a : $c = a + b$ donc : $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$

Donc $OBCA$ est un parallélogramme



$$\text{on a : } |a-0| = |2i| = 2 = OA$$

$$OB = |b-0| = |\sqrt{2}(1+i)| = |\sqrt{2}|(1+i)| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$$

alors : $OB = OA$

donc OBCA est un losange

$$2) \arg c \equiv (\vec{i}; \overrightarrow{OC}) [2\pi]$$

$$\equiv (\vec{i}; \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) [2\pi]$$

$$\equiv (\vec{i}; \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2} (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) [2\pi] \text{ (OBCA : losange)}$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} \arg \frac{a}{b} [2\pi]$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} (\arg a - \arg b) [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg c \equiv \frac{1}{2} (\arg a + \arg b) [2\pi]$$

$$\text{Or : } a = 2i \text{ donc : } \arg a \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Et : } b = \sqrt{2}(1+i) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$b = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ donc } \arg b \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg c \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

Exercice32 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a = 2 + i$,

$$b = 3 + 2i \text{ et } c = 5 - i$$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Calculer $\tan \alpha$

$$\text{Solution : On a : } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \alpha = \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\text{Donc : } \frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{26}}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\text{Donc : } \sqrt{26} \cos \alpha = 1 \text{ et } \sqrt{26} \sin \alpha = -5$$

$$\text{Donc : } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} \text{ et } \sin \alpha = \frac{-5}{\sqrt{26}}$$

$$\text{Donc : } \tan \alpha = -5$$

Exercice33 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points

A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 + i$

et $z_3 = 1 - i$

1) Placer dans le repère \mathcal{R} les points A, B et C

2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ et déterminer une mesure de

l'angle $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment [BC] et en déduire que :

$$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme

algébrique puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice34 : 1° Vérifier que les points $A(5+3i)$;
 $B(2+i)$ et $C(-1-i)$ sont alignés

2° Est ce que les points $M(-2+2i)$, $N(2-i)$ et
 $O(1-i)$ sont alignés ?

Exercice35 : Dans le plan complexe, déterminer
l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} \text{ Soit un imaginaire pur.}$$

Solution : Pour répondre à cette question, on
peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa
partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la
partie réelle.

Il faut que $z \neq 1$. On note $A(1)$

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$Z = \frac{5z - 2}{z - 1} = \frac{5x - 2 + 5iy}{x - 1 + iy} = \frac{(5x - 2 + 5iy)(x - 1 - iy)}{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2 - 5x - 2x + 2 + 5y^2) + i(-5xy + 2y + 5xy - 5y)}{(x - 1)^2 + y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2 - 7x + 2 + 5y^2) - 3iy}{(x - 1)^2 + y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2 + 5y^2 - 7x + 2}{(x - 1)^2 + y^2} = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 5y^2 - 7x + 2 = 0 \\ x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{49}{100} + \frac{2}{5} = 0$$

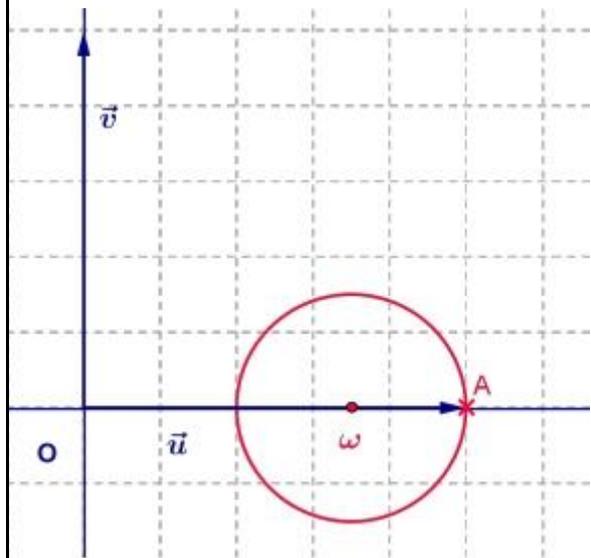
$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

$$\omega\left(\frac{7}{10} + 0i\right) \text{ et de rayon } \frac{3}{10}.$$

Le point A(1) appartient à (c).

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé
de A.



Exercices36 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$\text{que : } \left| \frac{z - 2}{z + 1 - i} \right| = 1$$

Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$$z = x + yi \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

On doit avoir : $z \neq -1 + i$

$$z - 2 = x - 2 + yi$$

$$z + 1 - i = x + 1 + i(y - 1)$$

$$\left| \frac{z - 2}{z + 1 - i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z - 2|}{|z + 1 - i|} = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - 2| = |z + 1 - i|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$$y = 3x - 1$$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

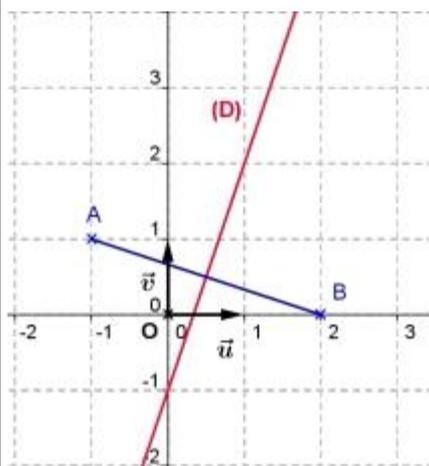
On pose : A(-1+i) et B(2) et M(z)

$$\overrightarrow{AM}(z+1-i) \text{ donc } |z+1-i| = AM$$

$$\overrightarrow{BM}(z-2) \text{ donc } |z-2| = BM$$

$$\frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice37 : soit a et b et c des nombres complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$ et $a \neq c$ et $b \neq c$

1) Montrer que : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$

Solution : $\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}}\right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$

On a si : $|z|=1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{1}{b} = \left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{1}{b} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\text{Donc : } 2 \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{a}{b}\right) [\pi]$$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



Bon courage