~ Tronc Commun ~

L'ordre dans IR

(Série #2 : 7 exercices résolus)

Exercice 1 :

Soit x un nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

On pose $A(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

1) Donner un encadrement du nombre $A(x)$
2) a) Déterminer les deux réels a et b tels que : $A(x)=a+\dfrac{b}{x+2}$

   b) Déterminer un autre encadrement du nombre $A(x)$
3) Déterminer le plus fin des deux encadrements précédents de $A(x)$

Exercice 2 :

1) Comparer $2\sqrt{7}$ et $3\sqrt{3}$
2) Développer $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2$
3) On pose $A=\sqrt{55-12\sqrt{21}}$

   Simplifier A
4) Sachant que : $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et $2,6<\sqrt{7}<2,7$

   Donner une approximation de A d'amplitude $0,5$ par défaut et par excès

Exercice 3 :

Soient a et b deux réels tels que : $|a+2|\leq 1$ et $0\leq b\leq 2$

1) Encadrer le nombre a et montrer que $|a+b+1|\leq 2$
2) On considère le nombre réel A tel que : $A=ab-2a+3b$.

   Vérifier que : $A=(a+3)(b-2)+6$ et montrer que $2\leq A\leq 6$

Exercice 4 :

Soit $x\in[4;6]$. On pose $A=\dfrac{2x+3}{x-2}$.

1) Donner un encadrement de A
2) a. Vérifier que $A=2+\dfrac{7}{x-2}$ b. Donner un autre encadrement de A

Exercice 5 :

Soient a et b deux réels tels que : $a \geq 2$, $b \leq 5$ et $b - a = 2$

1) Montrer que $a \leq 3$ et $4 \leq b$.
2) Calculer le nombre $A = \sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(b-4)^2}$
3) Calculer le nombre $B = |a+b-6| + |a+b-8|$

Exercice 6 :

Soit x un nombre réel.

1) Vérifier que : $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
2) Soit x de l'intervalle $[1;3]$

   Montrer que : $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$
3) a. Sachant qu'on a : $x \in [1;3]$

   Montrer que : $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$

   b. En déduire que : $\left| \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$

Exercice 7 :

Soit x un nombre réel .

On pose $E = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1) Montrer que : $E - 1 = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$
2) En déduire que : $|E - 1| \leq \frac{1}{2}x^2$
3) Trouver une valeur approchée du nombre $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

Corrigé de l'exercice 1 :

1) Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

donc $-1 \leq 2x \leq 2$

donc $\boxed{2 \leq 2x+3 \leq 5}$

et $\frac{3}{2} \leq x+2 \leq 3$

donc $\boxed{\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{3}}$

d'où $\frac{2}{3} \leq \frac{2x+3}{x+2} \leq \frac{10}{3}$

Et par suite $\boxed{\boxed{\frac{2}{3} \leq A(x) \leq \frac{10}{3}}}$

2) a) Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a $a + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2}$

$A(x) = a + \frac{b}{x+2}$ équivaut à $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2}$

équivaut à $2x+3 = ax+2a+b$

équivaut à $\begin{cases} a = 2 \\ 2a+b = 3 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

D'où $A(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$

b) Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

On a $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{2}{3}$

donc $-\frac{2}{3} \leq -\frac{1}{x+2} \leq -\frac{1}{3}$

donc $\frac{4}{3} \leq 2-\frac{1}{x+2} \leq \frac{5}{3}$

et par suite $\boxed{\boxed{\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}}}$

3)

- ✓ L'encadrement $\boxed{\boxed{\frac{2}{3} \leq A(x) \leq \frac{10}{3}}}$ a pour amplitude $\frac{10}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$
- ✓ L'encadrement $\boxed{\boxed{\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}}}$ a pour amplitude $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$

Donc le plus fin des deux encadrements précédents de $A(x)$ est $\frac{4}{3} \leq A(x) \leq \frac{5}{3}$ (car $\frac{1}{3}<\frac{8}{3}$)

Corrigé de l'exercice 2 :

1) On a $\left(2\sqrt{7}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2=28-27=1$

   Donc $\left(2\sqrt{7}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2>0$

   Donc $\left(2\sqrt{7}\right)^2>\left(3\sqrt{3}\right)^2$

   D'où $2\sqrt{7}>3\sqrt{3}$

2) $\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2-2\left(3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{7}\right)+\left(2\sqrt{7}\right)^2=27-12\sqrt{21}+28=55-12\sqrt{21}$

3) On a $A=\sqrt{55-12\sqrt{21}}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2}=\left|3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right|$

   Puisque $3\sqrt{3}-2\sqrt{7}<0$ alors $A=2\sqrt{7}-3\sqrt{3}$

4) On a $1,7<\sqrt{3}<1,8$ et $2,6<\sqrt{7}<2,7$

   Donc $5,1<3\sqrt{3}<5,4$ et $5,2<2\sqrt{7}<5,4$

   Donc $-5,4<-3\sqrt{3}<-5,1$ et $5,2<2\sqrt{7}<5,4$

   Donc $-0,2<2\sqrt{7}-3\sqrt{3}<0,3$

   Donc $-0,2<A<0,3$

   D'où $-0,2$ est une approximation de A par défaut d'amplitude $0,3-(-0,2)=0,5$

   Et $0,3$ est une approximation de A par excès d'amplitude $0,3-(-0,2)=0,5$

Corrigé de l'exercice 3 :

1) On a $|a+2|\leq 1$

   Donc $-1\leq a+2\leq 1$

   Donc $-3\leq a\leq -1$

   Et on a $0\leq b\leq 2$

   Donc $-3\leq a+b\leq 1$

   Donc $-2\leq a+b+1\leq 2$

   Et par suite $|a+b+1|\leq 2$

2)

   ✓ $(a+3)(b-2)+6=ab-2a+3b-6+6=ab-2a+3b=A$

   ✓ On $-3\leq a\leq -1$ donc $0\leq a+3\leq 2$

   Et on a $0\leq b\leq 2$ donc $-2\leq b-2\leq 0$ donc $0\leq -(b-2)\leq 2$

   Donc $0\leq -(a+3)(b-2)\leq 4$ donc $-4\leq (a+3)(b-2)\leq 0$

   D'où $2\leq (a+3)(b-2)+6\leq 6$

   Et par suite $2\leq A\leq 6$

Corrigé de l'exercice 4 :

1) Soit $x\in[4;6]$

   On a $4\leq x\leq 6$ donc $8\leq 2x\leq 12$ donc $\boxed{11\leq 2x+3\leq 15}$

   Et $2\leq x-2\leq 4$ donc $\boxed{\frac{1}{4}\leq \frac{1}{x-2}\leq \frac{1}{2}}$

   D'où $\boxed{\frac{11}{4}\leq \frac{2x+3}{x-2}\leq \frac{15}{2}}$

   Et par suite $\boxed{\boxed{\frac{11}{4}\leq A\leq \frac{15}{2}}}$

2) a) $2+\frac{7}{x-2}=\frac{2x-4+7}{x-2}=\frac{2x+3}{x-2}=A$

   b) on a $4\leq x\leq 6$

   donc $\frac{1}{4}\leq \frac{1}{x-2}\leq \frac{1}{2}$

donc $\frac{7}{4} \leq \frac{7}{x-2} \leq \frac{7}{2}$

donc $\frac{15}{4} \leq 2+\frac{7}{x-2} \leq \frac{11}{2}$

d'où $\boxed{\frac{15}{4} \leq A \leq \frac{11}{2}}$

Corrigé de l'exercice 5 :

1)

- ✓ on a $b-a=2$ donc $a=b-2$
  et on a $b \leq 5$ donc $b-2 \leq 3$ donc $a \leq 3$
- ✓ on a $b-a=2$ donc $b=a+2$
  et on a $a \geq 2$ donc $a+2 \geq 4$ donc $b \geq 4$

2) $A=\sqrt{(a-3)^2}+\sqrt{(b-4)^2}=|a-3|+|b-4|$

On a $a \leq 3$ donc $a-3 \leq 0$ donc $|a-3|=3-a$

Et on a $b \geq 4$ donc $b-4 \geq 0$ donc $|b-4|=b-4$

D'où $A=3-a+b-4=b-a-1=2-1=1$

3) $B=|a+b-6|+|a+b-8|$

On a $2 \leq a \leq 3$ et $4 \leq b \leq 5$

Donc $6 \leq a+b \leq 8$

Donc $0 \leq a+b-6$ et $a+b-8 \leq 0$

Donc $\begin{cases} |a+b-6|=a+b-6 \\ |a+b-8|=-a-b+8 \end{cases}$

Donc $B=a+b-6-a-b+8$

D'où $B=2$

Corrigé de l'exercice 6 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$

$(x-1)^2-1=x^2-2x+1-1=x^2-2x$

2) On a $1 \leq x \leq 3$

Donc $0 \leq x-1 \leq 2$

Donc $0 \leq (x-1)^2 \leq 4$

Donc $-1 \leq (x-1)^2 - 1 \leq 3$

d'ou $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$

3) a) on a $-1 \leq x^2 - 2x \leq 3$

donc $2 \leq x^2 - 2x + 3 \leq 6$

donc $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$

b) on a $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} \leq \frac{3}{2}$

donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \leq \frac{1}{2}$

d'où $\left| \frac{3}{x^2 - 2x + 3} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$

Corrigé de l'exercice 7 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
E-1 &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \\
&= \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)} \\
&= \frac{1-\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2} \\
&= \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}
\end{aligned}
$$

2) On a $|E-1| = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$

On a $x^2 \geq 0$

Donc $1+x^2 \geq 1$ et $\sqrt{1+x^2} \geq 1$

Donc $\sqrt{1+x^2}+1+x^2 \geq 2$

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Donc $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}x^2$

D'où $|E-1| \leq \dfrac{1}{2}x^2$

3) On a pour tout x de $\mathbb{R}$ $|E-1| \leq \dfrac{1}{2}x^2$

Donc $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1\right| \leq \dfrac{1}{2}x^2$

Prenons $x = 0,02$

Donc $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1+(0,02)^2}}-1\right| \leq \dfrac{1}{2}(0,02)^2$

Donc $\left|\dfrac{1}{\sqrt{1,0004}}-1\right| \leq 2\times 10^{-4}$

D'où 1 est une valeur approchée du nombre $\dfrac{1}{\sqrt{1,0004}}$ d'amplitude 2×10^{-4}

つづく