

~ 2<sup>ème</sup> Sciences Expérimentales ~  
Série d'exercices : Limites et continuités  
(12 exercices résolus)

**Exercice 1 :**

Montrer que la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 est continue en 0

**Exercice 2 :**

Montrer que la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3} & x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases}$$
 est continue en 3

**Exercice 3 :**

Montrer que la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-6x} & x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$
 est continue en 2

**Exercice 4 :**

Soit  $f$  la fonction la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases} \quad (m \text{ est un paramètre réel})$$

Déterminer la valeur du nombre réel  $m$  pour laquelle  $f$  est continue en 1

**Exercices 5 :**

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan(x)}{3x}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}$$

**Exercice 6 :**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3 + x - 1$

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$
- 2) Montrer que  $\alpha \in ]0,1[$
- 3) Etudier le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 7 :**

Montrer que l'équation (E) :  $1 + \sin x = x$  admet au moins une solution sur l'intervalle

$$I = \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

**Exercice 8 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = \mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

- 1) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer.
- 2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$

**Exercice 9 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]1, +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - 2x$

- 1) Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  qu'il faut déterminer.
- 2) Déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$

**Exercice 10 :**

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} ; \quad B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + 1} ; \quad C = \frac{\sqrt[3]{4} \sqrt{8} (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} ; \quad D = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$$

**Exercice 11 :**

Calculer les limites suivantes :

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - 2x + 4$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$$

**Exercice 12 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

### Corrigé de l'exercice 1

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\tan x (\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cancel{1} - \cancel{1}}{\tan x (\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Par suite la fonction  $f$  est continue en 0

### Corrigé de l'exercice 2

$$\text{On a } f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = x + 4 \text{ pour tout } x \neq 3$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 4 = 7$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Par suite la fonction  $f$  est continue en 3

### Corrigé de l'exercice 3

$$\text{On a } f(2) = \frac{2(2)+1}{7-3(2)} = 5$$

$$\text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x+1}{7-3x} = 5$$

$$\text{Et } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x + 3 = 5$$

Puisque  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2)$  alors  $f$  est continue en 2

### Corrigé de l'exercice 4

On a :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(1+h))}{h} \quad \left( \begin{array}{l} h = x - 1 \\ x \rightarrow 1 \\ h \rightarrow 0 \end{array} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \pi h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} -\pi \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \quad \left( \begin{array}{l} t = \pi h \\ h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right) \\
 &= -\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f \text{ est continue en } 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \\
 &\Leftrightarrow \boxed{m = -\pi}
 \end{aligned}$$

### Corrigé de l'exercice 5

- On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan(x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \times \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$  et la fonction "cos" est continue en  $\frac{\pi}{3}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan(x)}{3x}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$  et la fonction "sin" est continue en  $\frac{\pi}{4}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$  et la fonction " $\sqrt{\quad}$ " est continue en 4

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = \sqrt{4} = 2$$

### Corrigé de l'exercice 6

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

- 1) Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

On a :

- ▶  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ( car  $f$  est un polynôme )
- ▶  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$
- ▶  $0 \in f(\mathbb{R})$  ( car  $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$  )

Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$

- 2) On a  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires :  $0 < \alpha < 1$

- 3) Etudions le signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

1<sup>er</sup> cas : si  $x \leq \alpha$

Alors  $f(x) \leq f(\alpha)$  ( car  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  )

Donc  $f(x) \leq 0$  ( car  $f(\alpha) = 0$  )

2<sup>ème</sup> cas : si  $x \geq \alpha$

Alors  $f(x) \geq f(\alpha)$  ( car  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  )

Donc  $f(x) \geq 0$  ( car  $f(\alpha) = 0$  )

### Corrigé de l'exercice 7

1) Montrons que l'équation (E) :  $1 + \sin x = x$  admet au moins une solution sur

$$\text{l'intervalle } I = \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

Considérons la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = 1 + \sin(x) - x$

On a :

▶  $h$  est continue sur  $I = \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$

$$\left. \begin{array}{l} \text{▶ } h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4 - \pi}{2} > 0 \\ h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6 + 3\sqrt{3} - 4\pi}{6} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right) \times h\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

2) Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation  $h(x) = 0$  admet au

$$\text{moins une solution sur l'intervalle } I = \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

D'où l'équation (E) :  $1 + \sin x = x$  admet au moins une solution sur l'intervalle

$$I = \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

### Corrigé de l'exercice 8

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = \mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

1) On a :

▶  $f$  est continue sur  $I = \mathbb{R}^+$  ( car  $f$  est une fonction homographique )

▶  $f$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}^+$  et on a  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $I = \mathbb{R}^+$

Par suite  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J = f(I)$  vers  $I$

Tel que :  $J = f(\mathbb{R}^+) = f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = [-1, 1[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in J = [-1, 1[ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in I = \mathbb{R}^+ \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow xy + x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow y - xy = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y(1-x) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{1-x}$$

Donc :  $(\forall x \in [-1, 1[) f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$

### Corrigé de l'exercice 9

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]1, +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - 2x$

1) Montrons que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$

On a :

▶  $f$  est continue sur  $I = ]1, +\infty[$

▶  $f$  est strictement croissante sur  $I = ]1, +\infty[$  ( car

$$(\forall x \in ]1, +\infty[) f'(x) = 2(x-1) > 0)$$

Par suite  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J = f(I)$  vers  $I$ .

Tel que :  $J = f(]1, +\infty[) = ]-1, +\infty[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in ]-1, +\infty[ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in ]1, +\infty[ \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y^2 - 2y$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - x = 0$$

$$\Delta = 4 + 4x = 4(1+x) > 0 \quad \text{car } x > -1$$

$$\text{Donc } y = \frac{2 - \sqrt{4(1+x)}}{2} = 1 - \sqrt{1+x} < 1 \quad \text{ou} \quad y = \frac{2 + \sqrt{4(1+x)}}{2} = 1 + \sqrt{1+x} > 1$$

$$\text{Donc } y = 1 + \sqrt{1+x}$$

$$\text{D'où } (\forall x \in ]-1, +\infty[) \quad f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$$

### Corrigé de l'exercice 10

- $A = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^7}} = \frac{10\sqrt[2]{2^2} \times 10\sqrt[2]{2^{15}}}{10\sqrt[2]{2^7}} = \frac{10\sqrt[2]{2^{17}}}{10\sqrt[2]{2^7}} = \sqrt[2]{2^{10}} = 2$
- $B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3} + 1)((\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3})^3 + 1} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}{4}$
- $C = \frac{\sqrt[3]{4} \sqrt{8} (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \left( 2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2}{\left( 4^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{4}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\left( \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}} = 2^{2 + \frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$
- $D = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{4})^3 - (\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}{4 - 3} = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}$

### Correction de l'exercice 11

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 0$$

( car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} + x = +\infty$  )

$$2) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{(x - 8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{1}{12}$$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6-8}{(x-1)(\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4)} - \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \frac{2}{12} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - 2x + 4 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left[ 1 + \frac{3}{x^2} \right]} - 2x + 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x + 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{4}{x^2} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{4}{x^2} \right) = -1 \end{cases}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}} = 0 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x + 1 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x - 1 = 0^+ \end{cases}$$

**Corrigé de l'exercice 12**

On a :  $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

On pose  $x = t^6$ , l'équation devient  $\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6} - 12 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow$

$(t - 2)(t^2 + 3t + 6) = 0$

$\Leftrightarrow$

$t - 2 = 0$  ou  $t^2 + 3t + 6 = 0$  ( $\Delta = -15 < 0$ )

$\Leftrightarrow t = 2$

Donc  $x = 2^6 = 64$ . D'où  $S = \{64\}$