

Suites

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (**IT)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}.$$

- 1) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ . Réciproque ?
- 2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?
- 3) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

Exercice n° 2 (***)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de CÉSARO et est monotone, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice n° 3 (**IT)

Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (série harmonique).

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$.
- 2) Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Exercice n° 4 (**)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

Exercice n° 5 (***)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}$ (on sera amené à déterminer trois réels a , b et c tels que pour tout entier naturel non nul k , $\frac{6}{k(k+1)(2k+1)}$ et on utilisera l'exercice n° 3 : il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$).

Exercice n° 6 (**I) (moyenne arithmético-géométrique)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à calculer (cette limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b).

Exercice n° 7 (***)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est égale à $\frac{b \sin \left(\operatorname{Arccos} \left(\frac{a}{b} \right) \right)}{\operatorname{Arccos} \left(\frac{a}{b} \right)}$.

Exercice n° 8 (I)**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ne s'annulant pas. Montrer que si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ tend vers un réel ℓ élément de $[0, 1[$ quand n tend vers $+\infty$, alors u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 9 ()**

Limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$1) \frac{\sin n}{n} \quad 2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad 3) \frac{n!}{n^n} \quad 4) \frac{\mathbb{E} \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right)}{\mathbb{E} \left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right)} \quad 5) \sqrt[n]{n^2} \quad 6) \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad 7) \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3} \quad 8) \prod_{k=1}^n 2^{k/2^{2^k}}.$$

Exercice n° 10 ()**

Etudier la suite (u_n) définie par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

Exercice n° 11 (T)** (Récurrences homographiques).

Déterminer u_n en fonction de n quand la suite u vérifie :

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n} \quad 2) u_{n+1} = \frac{4(u_n - 1)}{u_n}$$

(ne pas se poser de questions d'existence).

Exercice n° 12 ()**

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exercice n° 13 ()**

Même exercice avec $u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}$ et $w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Exercice n° 14 (*)**

Soit u une suite complexe et v la suite définie par $v_n = |u_n|$.

On suppose que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ converge vers un réel positif ℓ .

Montrer que si $0 \leq \ell < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 et si $\ell > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

Montrer que si $\ell = 1$, tout est possible.

Exercice n° 15 (*)**

1) Soit u une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel ℓ , alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et a même limite.

2) Etudier la réciproque.

3) Application : limites de a) $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$ b) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ c) $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(3n)!}$.

Exercice n° 16 (*)

Soient u et v deux suites de réels de $[0, 1]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Exercice n° 17 ()**

Montrer que si les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent alors (u_n) converge.

Exercice n° 18 (T)**

Etudier les deux suites $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice n° 19 (T)**

Même exercice avec $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

Exercice n° 20 (T)**

Même exercice avec $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

Exercice n° 21 (T)**

Déterminer u_n en fonction de n et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.
- 2) $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = u_n$.
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$.
- 4) $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
- 5) $\forall n \geq 2, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 2^n$.

Exercice n° 22 (*)**

Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ radicaux})$.

Exercice n° 23 (*)**

1) Montrer que pour x réel strictement positif, on a : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.

2) Montrer que $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$ et en déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Exercice n° 24 (**)**

Soit $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel x . Montrer que les suites $(|p_n|)$ et (q_n) tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 25 ()**

Trouver un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la suite (u_{kn}) converge.

Exercice n° 26 (*)**

Soit f une application injective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$.

Exercice n° 27 (*)**

Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Etudier la suite (u_n) .

Exercice n° 28 (*)**

Etude des suites $(u_n) = (\cos na)$ et $(v_n) = (\sin na)$ où a est un réel donné.

1) Montrer que si $\frac{a}{2\pi}$ est rationnel, les suites u et v sont périodiques et montrer dans ce cas que (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2) On suppose dans cette question que $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel .

a) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge .

b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre u_n et v_n , montrer par l'absurde que (u_n) et (v_n) divergent.

Exercice n° 29 (*)**

Calculer $\inf_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|))$.

Exercice n° 30 (I)**

Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

Exercice n° 31 (*)**

Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Montrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Suites : corrigé

Exercice n° 1

1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit n un entier naturel strictement supérieur à n_0 .

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k - \ell| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell|$ est une expression constante quand n varie et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| = 0$. Par suite, il

existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq n_1$, on a alors $|v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$. La suite (v_n) est donc convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

La réciproque est fautive. Pour n dans \mathbb{N} , posons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est divergente. D'autre part, pour n dans \mathbb{N} , $\sum_{k=0}^n (-1)^k$ vaut 0 ou 1 suivant la parité de n et donc, dans tous les cas, $|v_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Par suite, la suite (v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

2) Si u est bornée, il existe un réel M tel que, pour tout naturel n , $|u_n| \leq M$. Pour tout entier naturel n , on a alors

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M = \frac{1}{n+1} (n+1)M = M.$$

La suite v est donc bornée.

La réciproque est fautive. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} p & \text{si } n = 2p, p \in \mathbb{N} \\ -p & \text{si } n = 2p+1, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

u n'est pas bornée car la suite extraite (u_{2p}) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Mais, si n est impair, $v_n = 0$, et si n est pair, $v_n = \frac{1}{n+1} u_n = \frac{1}{n+1} \frac{n}{2}$, et dans tous les cas $|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \frac{n}{2} \leq \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ et la suite v est bornée.

3) Si u est croissante, pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) \sum_{k=0}^{n+1} u_k - (n+2) \sum_{k=0}^n u_k \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^n u_k \right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (u_{n+1} - u_k) \geq 0. \end{aligned}$$

La suite v est donc croissante.

Exercice n° 2

Supposons sans perte de généralité u croissante (quite à remplacer u par $-u$).

Dans ce cas, ou bien u converge, ou bien u tend vers $+\infty$.

Supposons que u tende vers $+\infty$, et montrons qu'il en est de même pour la suite v .

Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un rang n_0 tel que pour n naturel supérieur ou égal à n_0 , $u_n \geq 2A$. Pour $n \geq n_0 + 1$, on a alors,

PROF: ATMANI NAJIB

$$v_n = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$ tend vers $2A$ et donc, il existe un rang n_1 à partir duquel

$$v_n \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1} > A.$$

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}), (n \geq n_1 \Rightarrow v_n > A)$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Par contraposition, si v ne tend pas vers $+\infty$, la suite u ne tend pas vers $+\infty$ et donc converge, d'après la remarque initiale.

Exercice n° 3

1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0; +\infty[$ et donc, pour k entier naturel non nul donné, on a :

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k) \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq (k+1-k) \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Donc, pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ et, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$.

En sommant ces inégalités, on obtient pour $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1),$$

et pour $n \geq 2$,

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n,$$

cette inégalité restant vraie quand $n = 1$. Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.}$$

En particulier, pour $n \geq 1$, $H_n \geq \ln(n+1)$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$

2) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \right) dx \leq 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $[n, n+1]$ et donc, pour tout x de $[n, n+1]$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \leq 0$. De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $[n+1, n+2]$. Enfin,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

et donc la suite $u - v$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En résumé, la suite u décroît, la suite v croît et la suite $u - v$ tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons γ cette limite.

Pour tout entier naturel non nul n , on a $v_n \leq \gamma \leq u_n$, et en particulier, $v_3 \leq \gamma \leq u_1$ avec $v_3 = 0,5\dots$ et $u_1 = 1$. Donc, $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$.

Pour n entier naturel non nul donné, on a :

$$0 \leq u_n - v_n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq e^{0,01} - 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{e^{0,01} - 1} = 99,5\dots \Leftrightarrow n \geq 100.$$

Donc $0 \leq \gamma - v_{100} \leq 10^{-2}$. On trouve $\gamma = 0,57$ à 10^{-2} près par défaut. Plus précisément, $\gamma = 0,5772156649\dots$ (γ est la constante d'EULER).

Exercice n° 4

Soit r la raison de la suite u . Pour tout entier naturel k , on a $\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} = r \frac{1}{u_k u_{k+1}}$. En sommant ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} r \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} \text{ (somme télescopique)} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_0}{u_0 u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}. \end{aligned}$$

Si $r \neq 0$, on obtient $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}}$, et si $r = 0$, u est constante et le résultat est immédiat.

Exercice n° 5

Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a , b et c tels que, pour entier naturel non nul k ,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \quad (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned} \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} &= \frac{a(k+1)(2k+1) + bk(2k+1) + ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} \\ &= \frac{(2a+2b+c)k^2 + (3a+b+c)k + a}{k(k+1)(2k+1)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases},$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right).$$

Ensuite, d'après l'exercice n° 3, il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ telle que, pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$. Pour tout entier naturel non nul n , on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_n - 1 + \frac{1}{n+1} = \ln n + \gamma - 1 + \frac{1}{n+1} + \varepsilon_n,$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 2 \ln n + 2\gamma - 1 + \frac{1}{n+1} + 2\varepsilon_n.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} &= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = -1 + H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n \\
&= \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - 1 + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}\varepsilon_n \\
&= \ln 2 + \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma - 1 + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}\varepsilon_n \\
&= \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}\varepsilon_n
\end{aligned}$$

et finalement,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} &= 6(2\ln n + 2\gamma - 1) - 24\left(\frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1\right) - 24\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 24\varepsilon_{2n+1} \\
&= 6(3 - 4\ln 2) - 24\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 24\varepsilon_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = 6(3 - 4\ln 2).$$

Exercice n° 6

Puisque a et b sont positifs, par récurrence, pour tout entier naturel n , u_n et v_n existent et sont positifs.

Pour tout entier naturel non nul n ,

$$v_n - u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + v_{n-1}) - \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} = \frac{1}{2}(u_{n-1} - 2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} + v_{n-1}) = \frac{1}{2}(\sqrt{v_{n-1}} - \sqrt{u_{n-1}})^2 \geq 0.$$

Ceci reste vrai quand $n = 0$ car $a < b$ et donc, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$.

Ensuite, pour tout entier naturel n ,

- $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0$;
- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - v_n = \frac{1}{2}(u_n - v_n) \leq 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

D'autre part, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq v_0$ et donc la suite (u_n) est majorée par v_0 . De même la suite (v_n) est minorée par u_0 . On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers des réels positifs.

Notons ℓ et ℓ' les limites respectives des suites (u_n) et (v_n) . On fait tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $\frac{1}{2}(u_n + v_n) = u_{n+1}$ et on obtient $\frac{1}{2}(\ell + \ell') = \ell$ ou encore $\ell = \ell'$.

Exercice n° 7

Posons $\alpha = \text{Arccos} \frac{a}{b}$. α existe car $0 < \frac{a}{b} < 1$ et est élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, $a = b \cos \alpha$. Enfin, pour tout entier naturel n , $\frac{\alpha}{2^n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc, $\cos \frac{\alpha}{2^n} > 0$.

On a $u_0 = b \cos \alpha$ et $v_0 = b$ puis $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{b}{2}(1 + \cos \alpha) = b \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ et $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{b \cos^2 \frac{\alpha}{2} \times b} = b \cos \frac{\alpha}{2}$ puis $u_2 = \frac{b}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(1 + \cos \frac{\alpha}{2}\right) = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2}$ puis $v_2 = \sqrt{b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2} b \cos \frac{\alpha}{2}} = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$.

C'est vrai pour $n = 1$ et si pour $n \geq 1$, on a $v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$ alors,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} + v_n \right) = v_n \cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

puis

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = v_n \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} \quad (\text{car } \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0),$$

et donc $v_{n+1} = b \prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{\alpha}{2^k}$ puis $u_{n+1} = v_{n+1} \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} \text{ et } u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}.$$

Pour tout entier naturel non nul n , on a $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$. La suite v est donc strictement décroissante. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n , on a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n} \frac{\cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} \right) > \frac{1}{2} (1 + 1) = 1.$$

La suite u est strictement croissante. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_n &= b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} = b \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}} \\ &= \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{b \sin \alpha}{\alpha} \times \frac{1}{\left(\sin \frac{\alpha}{2^n} \right) / \left(\frac{\alpha}{2^n} \right)}. \end{aligned}$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{b \sin \alpha}{\alpha} \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{\sin X/X} = \frac{b \sin \alpha}{\alpha}$, puis $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \rightarrow \frac{b \sin \alpha}{\alpha}$.

Ainsi, les suites u et v sont adjacentes de limite commune $\frac{b \sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{Arccos} \frac{a}{b}}$.

Exercice n° 8

$\ell \in [0, 1[$ et donc $\frac{1-\ell}{2} > 0$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$.

Soit $n \geq n_0 + 1$.

$$\begin{aligned} |u_n| &= |u_{n_0}| \prod_{k=n_0}^{n-1} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \quad (\text{produit télescopique}) \\ |u_{n_0}| \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{1+\ell}{2} &= |u_{n_0}| \left(\frac{1+\ell}{2} \right)^{n-n_0}. \end{aligned}$$

Puisque $\ell \in [0, 1[$, $\frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$. Par suite, quand n tend vers $+\infty$, $|u_{n_0}| \left(\frac{1+\ell}{2} \right)^{n-n_0}$ tend vers 0 et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice n° 9

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2) $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc, $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ tend vers 1 puis $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)}$ tend vers $e^1 = e$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Pour n entier naturel non nul, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \text{ et donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \ln(1+1/n)} = e^{-1}.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{e} = 0,36... < 1$. On sait alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (voir exercice n° 8).

4) Pour $n \geq 1$,

$$\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \leq u_n \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - 1}.$$

Or, $\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}$ et $\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - 1}$ tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite u converge et a pour limite 1.

5) $\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{1}{n} \ln(n^2)} = e^{\frac{2 \ln n}{n}}$. Donc quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2}$ tend vers $e^0 = 1$.

6) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0$.

7) $\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

8) $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} = 2^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}}$. Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. Pour tout réel x ,

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k\right)'(x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k\right)'(x).$$

Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f(x) = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} \rightarrow 4$ (d'après un théorème de croissances comparées). Finalement,

$$\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} \rightarrow 2^{\frac{1}{2} \times 4} = 4.$$

Exercice n° 10

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\ 4(n+u_n) &= (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 \Leftrightarrow u_n = -n + \frac{1}{4}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)}) \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}(-2n+1+2\sqrt{n(n+1)}). \end{aligned}$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \frac{1/n}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

La suite (u_n) converge et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Exercice n° 11

1) Calcul formel de u_n . Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x}{3-2x} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n} - 1}{\frac{u_n}{3-2u_n}} = \frac{3u_n - 3}{u_n} = 3 \frac{u_n - 1}{u_n}.$$

Par suite, pour tout entier naturel n , $\frac{u_n - 1}{u_n} = 3^n \frac{u_0 - 1}{u_0}$, puis $u_n = \frac{u_0}{u_0 - 3^n(u_0 - 1)}$.

2) Calcul formel de u_n . Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{4(x-1)}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4(u_n - 1)}{u_n} - 2} = \frac{u_n}{2(u_n - 2)} = \frac{u_n - 2 + 2}{2(u_n - 2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n - 2}.$$

Par suite, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{u_n - 2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{u_0 - 2}$ puis $u_n = 2 + \frac{2(u_0 - 2)}{(u_0 - 2)n + 2}$.

Exercice n° 12

Pour tout entier naturel n , on a
$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \end{cases}.$$

La dernière égalité montre que la suite $v - u$ garde un signe constant puis, puisque pour tout naturel n ,

$$\text{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \text{sgn}(v_n - u_n) \text{ et } \text{sgn}(v_{n+1} - v_n) = -\text{sgn}(v_n - u_n),$$

les suites u et v sont monotones de sens de variation opposés.

Si par exemple $u_0 \leq v_0$, alors, pour tout naturel n , on a :

$$u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0.$$

Dans ce cas, la suite u est croissante et majorée par v_0 et donc converge vers un certain réel ℓ . De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0 et donc converge vers un certain réel ℓ' . Enfin, puisque pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3}$ et donc $\ell = \ell'$. Les suites u et v sont donc adjacentes. Si $u_0 > v_0$, il suffit d'échanger les rôles de u et v .

Calcul des suites u et v . Pour n entier naturel donné, on a $v_{n+1} - u_{n+1} + 1 = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$. La suite $v - u$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour tout naturel n , on a donc $v_n - u_n = \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)$.

D'autre part, pour n entier naturel donné, $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$. La suite $v + u$ est constante et donc, pour tout entier naturel n , on a $v_n + u_n = v_0 + u_0$.

En additionnant et en retranchant les deux égalités précédentes, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{2} \left(v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0) \right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2} \left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0) \right).$$

En particulier, $\ell = \ell' = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

Exercice n° 13

Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$ et donc, pour tout entier naturel n ,

$$u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0).$$

De même, en échangeant les rôles de u , v et w , $v_n - w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - w_0)$ et $w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0)$ (attention, cette dernière égalité n'est autre que la somme des deux premières et il manque encore une équation).

On a aussi, $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ et donc, pour tout naturel n , $u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0$.

Ainsi, u_n , v_n et w_n sont solutions du système

$$\begin{cases} v_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \\ w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0) \\ u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \end{cases}.$$

Par suite, pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3} \left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2u_0 - v_0 - w_0) \right) \\ v_n = \frac{1}{3} \left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 + 2v_0 - w_0) \right) \\ w_n = \frac{1}{3} \left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 - v_0 + 2w_0) \right) \end{cases}.$$

En particulier, les suites u , v et w convergent vers $\frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$.

Exercice n° 14

Supposons que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tende vers le réel positif ℓ .

1er cas. Supposons que $0 \leq \ell < 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$. ε est un réel strictement positif et donc,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}).$$

Pour $n \geq n_0$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur \mathbb{R}^+ , on obtient $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2ème cas. Supposons que $\ell > 1$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2}).$$

Mais alors, pour $n \geq n_0$, $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $|u_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit, pour α réel et n entier naturel non nul, $u_n = n^\alpha$. $\sqrt[n]{u_n} = e^{\alpha \frac{\ln n}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et ceci pour toute valeur de α . Mais, si $\alpha < 0$, u_n tend vers 0, si $\alpha = 0$, u_n tend vers 1 et si $\alpha > 0$, u_n tend vers $+\infty$. Donc, si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice n° 15

1) • Supposons $\ell > 0$. Soit ε un réel strictement positif, élément de $]0, 2\ell[$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $n > n_0$, puisque $u_n = u_{n_0} \prod_{k=n_0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, on a $u_{n_0} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$, et donc

$$(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Maintenant, le membre de gauche de cet encadrement tend vers $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$, et le membre de droite tend vers $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, on peut trouver un entier naturel $n_1 \geq n_0$ tel que, pour $n \geq n_1$, $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell - \varepsilon$, et $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell + \varepsilon$. Pour $n \geq n_1$, on a alors $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon))$ et donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers ℓ .

• Soit ε un réel strictement positif. Si $\ell = 0$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n > n_0$,

$$0 \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (u_{n_0})^{1/n} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-n_0/n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $\frac{\varepsilon}{2}$ est donc strictement plus petit que ε à partir d'un certain rang n_1 .

2) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit u la suite définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p} = a^p b^p \text{ et } u_{2p+1} = a^{p+1} b^p.$$

(on part de 1 puis on multiplie alternativement par a ou b).

Alors, $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}} \rightarrow \sqrt{ab}$.

Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers \sqrt{ab} (et en particulier converge).

On a bien sûr $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$ et $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet donc deux suites extraites convergentes de limites distinctes et est ainsi divergente. La réciproque du 1) est donc fausse.

3) a) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \binom{2n}{n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$.

b) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

c) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \times \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \times \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2 \times (n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}. \end{aligned}$$

Maintenant, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} = e^{-2n \ln(1+1/n)} = e^{-2 \ln(1+1/n)/(1/n)}$ tend vers e^{-2} , et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $27e^{-2}$. Par suite, $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ tend vers $\frac{27}{e^2}$.

Exercice n° 16

D'après le théorème de la limite par encadrement :

$$0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u \text{ converge et tend vers } 1.$$

Il en est de même pour v en échangeant les rôles de u et v

Exercice n° 17

Si $u_n^2 \rightarrow 0$, alors $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \rightarrow 0$ et donc $u_n \rightarrow 0$.

Si $u_n^2 \rightarrow \ell \neq 0$, alors $(u_n) = \left(\frac{u_n^3}{u_n^2}\right)$ converge.

Remarque. L'exercice n'a d'intérêt que si la suite u est une suite complexe, car si u est une suite réelle, on écrit immédiatement $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$ (et non pas $u_n = \sqrt{u_n^2}$).

Exercice n° 18

Les suites u et v sont définies à partir du rang 1 et strictement positives.

Pour tout naturel non nul n , on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{(n+1) \ln(n+2) + n \ln n - (2n+1) \ln(n+1)}.$$

Pour x réel strictement positif, posons alors $f(x) = (x+1) \ln(x+2) + x \ln x - (2x+1) \ln(x+1)$.
 f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{x+1}{x+2} + \ln(x+2) + 1 + \ln x - \frac{2x+1}{x+1} - 2 \ln(x+1) = -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \ln x + \ln(x+2) - 2 \ln(x+1).$$

De même, f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{x(x+1)^2 - x(x+2)^2 + (x+1)^2(x+2)^2 + x(x+1)^2(x+2) - 2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 3x + (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + x)(x^2 + 4x + 4)}{x(x+1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2} > 0. \end{aligned}$$

f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et donc, pour $x > 0$,

$$f'(x) < \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+1} + \ln \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right) = 0.$$

Donc, f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Or, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) \ln(x+2) + x \ln x - (2x+1) \ln(x+1) \\ &= (x + (x+1) - (2x+1)) \ln x + (x+1) \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) - (2x+1) \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) - \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2 \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} - 2 \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

On sait que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, et donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $0 - 0 + 2 - 2 = 0$. Comme f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) > \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

f est donc strictement positive sur $]0, +\infty[$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) > 0$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{f(n)} > 1$. La suite u est strictement croissante.

Remarque. On pouvait aussi étudier directement la fonction $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ sur $]0, +\infty[$.

Je vous laisse montrer de manière analogue que la suite v est strictement décroissante. Enfin, puisque u_n tend vers e , et que $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$ tend vers e , les suites u et v sont adjacentes.

Remarque. En conséquence, pour tout entier naturel non nul n , $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Par exemple, pour $n = 10$, on obtient

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{10} < e < \left(\frac{11}{10}\right)^{11}$$

et donc, $2,59... < e < 2,85...$ et pour $n = 100$, on obtient $1,01^{100} < e < 1,01^{101}$ et donc $2,70... < e < 2,73...$ Ces deux suites convergent vers e lentement.

Exercice n° 19

Il est immédiat que u croît strictement et que $v - u$ est strictement positive et tend vers 0. De plus, pour n entier naturel non nul donné,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} < 0,$$

et v est strictement décroissante. Les suites u et v sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune (à savoir e).

Remarque. Dans ce cas, la convergence est très rapide. On a pour tout entier naturel non nul n ,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$$

et $n = 7$ fournit par exemple $2,71825... < e < 2,71828...$.

Exercice n° 20

Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

La suite u est strictement croissante et la suite v est strictement décroissante. Enfin,

$$v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

et la suite $v - u$ converge vers 0. Les suites u et v sont ainsi adjacentes et donc convergentes, de même limite.

Exercice n° 21

1) L'équation caractéristique est $4z^2 - 4z - 3 = 0$. Ses solutions sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Les suites cherchées sont les suites de la forme

$$(u_n) = \left(\lambda \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{3}{2} \right)^n \right) \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels (ou deux complexes si on cherche toutes les suites complexes).}$$

Si u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite u , λ et μ sont les solutions du système $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = u_1 \end{cases}$ et donc

$$\lambda = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1) \text{ et } \mu = \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1) \text{ d'après les formules de CRAMER.}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1) \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1) \left(\frac{3}{2} \right)^n.$$

2) Clairement $u_{2n} = \frac{u_0}{4^n}$ et $u_{2n+1} = \frac{u_1}{4^n}$ et donc $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + (-1)^n}{2^n} u_0 + 2 \frac{1 - (-1)^n}{2^n} u_1 \right)$.

3) Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\lambda \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{3}{2} \right)^n$.

Une solution particulière de l'équation proposée est une constante a telle que $4a = 4a + 3a + 12$ et donc $a = -4$.

Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme $\left(-4 + \lambda \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \mu \left(\frac{3}{2} \right)^n \right)$ où λ et μ sont les

solutions du système $\begin{cases} \lambda + \mu = 4 + u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = 4 + u_1 \end{cases}$ et donc $\lambda = \frac{1}{4}(4 + 3u_0 - 2u_1)$ et $\mu = \frac{1}{4}(12 + u_0 + 2u_1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -4 + \frac{1}{4}(4 + 3u_0 - 2u_1) \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{4}(12 + u_0 + 2u_1) \left(\frac{3}{2} \right)^n.$$

4) La suite $v = \frac{1}{u}$ est solution de la récurrence $2v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$ et donc, (v_n) est de la forme $\left(\lambda \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{4} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{4} \right)^n \right)$

$$\text{et donc } u_n = \frac{1}{\lambda \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{4} \right)^n + \mu \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{4} \right)^n}.$$

5) Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $(\lambda + \mu 2^n)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2 est racine simple de l'équation caractéristique et donc il existe une solution particulière de l'équation proposée de la forme $u_n = an2^n$. Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} &= a(n+2)2^{n+2} - 3a(n+1)2^{n+1} + 2an2^n \\ &= (n(4a - 6a + 2a) + (8a - 6a)) 2^n 2a \times 2^n. \end{aligned}$$

Donc

$$u \text{ est solution } \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Les suites cherchées sont les suites de la forme $(-n2^{n-1} + \lambda + \mu 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice n° 22

• L'égalité proposée est vraie pour $n = 2$ car $\cos \frac{\pi}{2^2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Soit $n \geq 2$. Supposons que $\cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}$ ($n - 1$ radicaux).

Alors, puisque $\cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) > 0$ (car $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$),

$$\cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} \right)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}, \text{ (n radicaux).}$$

On a montré par récurrence que, pour $n \geq 2$, $\cos \left(\frac{\pi}{2^n} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}$ ($n - 1$ radicaux).

Ensuite, pour $n \geq 2$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots\sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux})$$

Enfin,

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots\sqrt{2}}} = 2^n \times 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \pi \rightarrow \pi,$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots\sqrt{2}}} = \pi$.

Exercice n° 23

1) Pour x réel positif, posons $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$. f et g sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0,$$

et

$$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1) > 0.$$

f et g sont donc strictement croissantes sur $]0, +\infty[$ et en particulier, pour $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$ et de même, $g(x) > g(0) = 0$. Finalement, f et g sont strictement positives sur $]0, +\infty[$ ou encore,

$$\forall x > 0, \ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x).$$

2) Soit k un entier naturel non nul.

D'après 1), $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} < \left(1 + \frac{1}{k}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, ce qui fournit $k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1)\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} ,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

En multipliant membre à membre ces encadrements, on obtient pour tout naturel non nul n :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^n k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod_{k=1}^n k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e} \frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e} \frac{n+1}{n} (n+1)^{1/n}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrements, comme $\frac{n+1}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini de même que

$(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$, on a montré que $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 24

Soit x un irrationnel et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x (p_n entier relatif et q_n entier naturel non nul, la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ n'étant pas nécessairement irréductible). Supposons que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Donc :

$$\exists A > 0 / (\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0 / q_n \geq A)$$

ou encore, il existe une suite extraite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est bornée.

La suite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui est bornée, et donc cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. L'une au moins de ces valeurs est prise un infinité de fois car sinon la suite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ n'aurait qu'un nombre fini de termes. Mais alors, on peut extraire de la suite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et donc de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est constante et en particulier convergente.

La suite $(p_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite d'entiers relatifs convergente et est donc constante à partir d'un certain rang.

Ainsi, on peut extraire de la suite $(p_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et donc de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(p_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ constante. La suite $((q_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est également constante car extraite de la suite constante $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et finalement, on a extrait de la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $\left(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ constante.

Mais la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x et donc la suite extraite $\left(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x . Puisque $\left(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}} = x$ et donc x est rationnel. Contradiction .

Donc la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Enfin, puisque $|p_n| = \left|\frac{p_n}{q_n}\right| q_n$ et que $\left|\frac{p_n}{q_n}\right|$ tend vers $|x| > 0$ (car x est irrationnel) et q_n tend vers $+\infty$, la suite $(|p_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice n° 25

On pose $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 0, u_5 = 1, u_6 = 0, u_7 = 1, u_8 = 0, u_9 = 0, u_{10} = 0, u_{11} = 1 \dots$ et plus généralement

$$\forall n \geq 2, u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 & \text{si } n \text{ est premier} \end{cases} .$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $n \geq 2$, l'entier kn est composé et donc, pour $n \geq 2, u_{kn} = 0$. En particulier, la suite $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0. Maintenant, l'ensemble des nombres premiers est infini et si p_n est le n -ième nombre premier, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. La suite $(u_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et est constante égale à 1. En particulier, la suite $(u_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins deux suites extraites convergentes de limites distinctes et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge bien que toutes les suites $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 pour $k \geq 2$.

Exercice n° 26

Soit f une application de \mathbb{N} dans lui-même, injective. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$.

Soient A un réel puis $m = \text{Max}(0, 1 + E(A))$. m est dans tous les cas un entier naturel strictement supérieur à A . Puisque f est injective, on a $\text{card}(f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})) \leq m + 1$. En particulier, $f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})$ est une partie finie (éventuellement vide) de \mathbb{N} .

Posons $n_0 = 1 + \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\}) = \emptyset \\ \text{Max}(f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})) & \text{sinon} \end{cases}$. Par définition de n_0 , si $n \geq n_0$, n n'est pas élément de $f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})$ et donc $f(n) > m > A$.

On a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow f(n) > A))$ ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$.

Exercice n° 27

Pour n naturel non nul et x réel positif, posons $f_n(x) = x^n + x - 1$.

Pour $x \geq 0, f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et donc $u_1 = \frac{1}{2}$.

Pour $n \geq 2, f_n$ est dérivable sur \mathbb{R}^+ et pour $x \geq 0, f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.

f_n est ainsi continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et donc bijective de \mathbb{R}^+ sur

$$f_n(\mathbb{R}^+) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right] = [-1, +\infty[.$$

En particulier,

$$\exists! x \in [0, +\infty[/ f_n(x) = 0.$$

Soit u_n ce nombre. Puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et que $f_n(1) = 1 > 0$, par stricte croissance de f_n sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1.$$

La suite u est donc bornée.

Ensuite, pour n entier naturel donné et puisque $0 < u_n < 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ puis, par stricte croissance de f_{n+1} sur \mathbb{R}^+ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$$

La suite u est croissante et majorée par 1. Donc, la suite u converge vers un réel ℓ . De plus, l'encadrement $0 < u_n < 1$ fournit par passage à la limite : $\ell \in [0, 1]$.

Si $0 \leq \ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$. Mais alors, pour $n \geq n_0$, on a $1 - u_n = u_n^n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $1 - \ell \leq 0$ ce qui est en contradiction avec $0 \leq \ell < 1$.
Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice n° 28

1) Posons $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

La suite u est donc q -périodique et de même la suite v est q -périodique. Maintenant, une suite périodique converge si et seulement si elle est constante. En effet, soient T une période strictement positive de u et ℓ la limite de u . Soit $k \in \llbracket 0, T-1 \rrbracket$. Pour tout entier naturel n , on a $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}|$. En faisant tendre n vers $+\infty$, puisque $|u_{k+nT} - u_{nT}| \rightarrow |\ell - \ell| = 0$, on obtient $u_k = u_0$.

Par périodicité, on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ et donc u est constante.

Or, si $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(p, q) = 1$ et $\frac{p}{q} \notin \mathbb{Z}$, alors $u_1 \neq u_0$ et la suite u n'est pas constante et donc diverge, et si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, la suite u est constante et donc converge.

2) Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \sin((n+1)a) = \sin(na) \cos a + \cos(na) \sin a = u_n \sin a + v_n \cos a.$$

Puisque $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, $\sin a \neq 0$ et donc $u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\sin a}$. Par suite, si v converge alors u converge. De même, à partir de $\cos((n+1)a) = \cos(na) \cos a - \sin(na) \sin a$, on voit que si u converge alors v converge (car $\cos a \neq 0$). Les suites u et v sont donc simultanément convergentes ou divergentes.

Supposons que la suite u converge, alors la suite v converge. Soient ℓ et ℓ' les limites respectives de u et v . D'après ce qui précède, ℓ et ℓ' sont solutions du système :

$$\begin{cases} \ell \sin a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \sin a = \ell. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell \sin a + \ell'(\cos a - 1) = 0 \\ \ell(\cos a - 1) - \ell' \sin a = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $-\sin^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$ car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ce système admet donc l'unique solution $\ell = \ell' = 0$ ce qui contredit l'égalité $\ell^2 + \ell'^2 = 1$. Donc, les suites u et v divergent.

Exercice n° 29

Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons $f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)$. $\{|\sin(n\alpha)|, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par 1) de \mathbb{R} . Donc, pour tout réel α de $]0, \pi[$, $f(\alpha)$ existe dans \mathbb{R} .

- Si α est dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$,

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) \geq \sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

- Si α est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$. Soit n_0 l'entier naturel tel que $(n_0 - 1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha$ (n_0 existe car la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante). Alors,

$$\frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha = (n_0 - 1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Mais alors,

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) \geq |\sin(n_0\alpha)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

- Si α est dans $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, on note que

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n(\pi - \alpha))|) = f(\pi - \alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

car $\pi - \alpha$ est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$.

On a montré que $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $f(\alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, $\inf_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|))$ existe dans \mathbb{R} et

$$\inf_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)) = \text{Min}_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice n° 30

La suite u n'est pas majorée. Donc, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / u_n > M$. En particulier, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \geq 0$.

Soit $k \geq 0$. Supposons avoir construit des entiers n_0, n_1, \dots, n_k tels que $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ et $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, u_{n_i} \geq i$.

On ne peut avoir : $\forall n > n_k, u_n < k + 1$ car sinon la suite u est majorée par le nombre $\text{Max}\{u_0, u_1, \dots, u_{n_k}, k + 1\}$. Par suite, $\exists n_{k+1} > n_k / u_{n_{k+1}} \geq k + 1$.

On vient de construire par récurrence une suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite u telle que $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n_k} \geq k$ et en particulier telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n_k} = +\infty$.

Exercice n° 31

Si u converge vers un réel ℓ , alors $\ell \in [0, 1]$ puis, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\ell(1 - \ell) \geq \frac{1}{4}$, et donc

$$\left(\ell - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \text{ et finalement } \ell = \frac{1}{2}. \text{ Par suite, si } u \text{ converge, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

De plus, puisque la suite u est à valeurs dans $]0, 1[$, pour n naturel donné, on a :

$$u_n(1 - u_n) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - u_n\right)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1 - u_n),$$

et puisque $1 - u_n > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.

u est croissante et majorée par 1. Donc u converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (amusant).