Suites géométriques et calculs d'intérêts

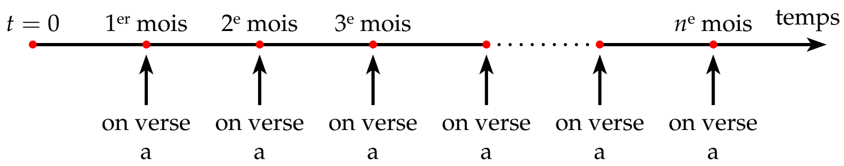
1 Calculer le capital accumulé après n mensualités

On verse une somme d'argent fixe chaque mois rémunérée à taux fixe (type plan épargne logement). Le compte est bloqué, c'est à dire que vous ne pouvez pas retirer de l'argent de ce compte pendant un temps donné (par exemple 5 ans). Le but est de calculer le capital accumulé après avoir versé un certain nombre de mensualités.

Pour cela, on pose :

- C_n : capital après n mensualités
- t : Taux d'intérêt mensuel (taux annuel divisé par 12)
- n : nombre de mensualités
- a : montant de la mensualité

On peut représenter la situation par le schéma suivant :



Quand on place un capital a à un taux d'intérêt mensuel de t pendant n mois, le capital accumulé C est de :

$$C = a(1+t)^n$$

Donc :

- Pour la 1re mensualité a, on a $(n-1)$ mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $$a(1+t)^{n-1}$$
- Pour la 2e mensualité a, on a $(n-2)$ mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $$a(1+t)^{n-2}$$
- Pour la 3e mensualité a, on a $(n-3)$ mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $$a(1+t)^{n-3}$$

  :

- Pour la $(n-1)$e mensualité a, on a 1 mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $$a(1+t)^1$$
- Pour la ne mensualité a, on a 0 mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $$a(1+t)^0 = a$$

Donc le capital C_n, après n mensualité est de :

$$C_n = a[1 + (1+t)^1 + (1+t)^2 + \cdots + (1+t)^{n-2} + (1+t)^{n-1}]$$

Il s'agit donc de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $(1+t)$, on a donc :

$$C_n = a\,\frac{1-(1+t)^n}{1-(1+t)}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\boxed{C_n = a\,\frac{(1+t)^n - 1}{t}}$$

Application numérique :

On place tous les mois 50 € à 3 % annuel. Quelle somme possède-t-on au bout de 5 ans.

On a donc :

- $a = 50$
- $t = \dfrac{3}{12} = 0,25\ \%$ donc $t = 0{,}002\,5$
- $n = 5 \times 12 = 60$ mensualités

On obtient donc : $C_{60} = 50 \times \dfrac{1,0025^{60} - 1}{0,0025} \simeq 3\,232{,}34$ €

Le montant des intérêts s'élève donc à : $3232,34 - 60 \times 50 \simeq 232,34$ €

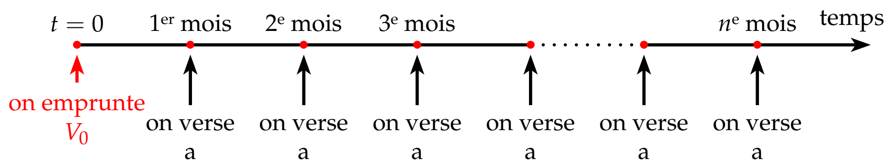
2 Calculer la mensualité à rembourser sur n mensualités pour un emprunt donné

On emprunte une somme de V_0 à la banque, on cherche à déterminer la mensualité à payer pour rembourser cet emprunt sur n mois.

on pose alors :

- a : le montant de la mensualité
- V_0 : le capital emprunté
- n : le nombre de mensualités
- t : le taux mensuel de l'emprunt (taux annuel divisé par 12)

On alors le schéma suivant :



Si V_0 avait été placé au même taux, le capital accumulé au bout de n mois aurait été de :

$$V_0(1+t)^n$$

Si l'on verse tous les mois a, le capital accumulé au bout de n mois serait de :

$$a\,\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

Comme l'opération doit être identique, on a :

$$V_0(1+t)^n = a\,\frac{(1+t)^n-1}{t}$$

En isolant a, on a :

$$a = V_0\,\frac{t\,(1+t)^n}{(1+t)^n-1}$$

En divisant par $(1+t)^n$, on obtient la formule :

$$\boxed{a = V_0\,\frac{t}{1-(1+t)^{-n}}}$$

Application numérique :

On emprunte 40 000 € sur 3 ans à 4,5 % annuel. Que doit-on rembourser chaque mois ?

On a donc :

- $V_0 = 40\ 000$
- $t = \dfrac{4,5}{12} = 0,375\ \%$ donc $t = 0{,}003\ 75$
- $n = 3 \times 12 = 36$ mensualités

On obtient donc : $a = 40\ 000 \times \dfrac{0,00375}{1-1,00375^{-36}} \simeq 1\ 189{,}88$ €

Le montant des intérêts s'élève donc à : $36 \times 1189,88 - 40\ 000 \simeq 2\ 835{,}68$ €