

Le produit scalaire

Exercice 1

Une unité de longueur a été choisie.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 3, B' est le milieu de [AC] et D le point défini par la relation :

$$4\vec{AD} = \vec{AB} + 3\vec{BC}$$

1. a) Démontrer que D est le barycentre du système : (A,3); (B,-2); (C,3)

b) En déduire que D appartient à la médiatrice du segment [AC].

2. Démontrer que $\vec{BD} = \frac{3}{2}\vec{BB}'$

3. Calculer DA^2 et DB^2

4. Déterminer l'ensemble (E) des points M vérifiant la relation : $3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = 12$

Vérifier que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à (E).

Exercice 2

On considère dans le plan un triangle ABC tel que : $AB = 7$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 5$ cm.

Soit I le milieu de [BC].

1. Montrer que $AI = \sqrt{33}$ cm.

2. a) Soit M un point du plan.

Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ est-il égal à un vecteur \vec{u} indépendant du point M ?

Déterminer alors \vec{u} en fonction du vecteur \vec{AI} .

b) Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{F} des points M du plan tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

Exercice 3

Écrire une équation cartésienne du plan \mathcal{P} , sachant que le projeté orthogonal de l'origine sur \mathcal{P} est le point A(1; 5; 7).

Exercice 4

Écrire une équation de la sphère de centre I(3; 1; -4), passant par le point A(4; 2; 1).

Exercice 5

Vérifier que A(4; -1; 2) est un point de la sphère \mathcal{S} ; écrire une équation du plan tangent en A à \mathcal{S} .

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 3 = 0.$$

Exercice 6

Calculer la distance d du point A à la droite \mathcal{D} sachant que :

la droite \mathcal{D} a pour équation $-x + 4y - 2 = 0$;

et le point A a pour coordonnées (-1; 3).

Exercice 7

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$ et $D(0; -1; 0)$.

1. Vérifier que le triangle ABC est équilatéral.
2. Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?
3. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Calculer $\vec{CI} \cdot \vec{CJ}$. En déduire une mesure en degrés de l'angle \widehat{ICJ} .
4. On appelle H le projeté orthogonal de J sur la droite (CI).
Calculer les coordonnées de H.
Quel rôle joue le point H sur le triangle ABC ?

Exercice 8

ABCD est un tétraèdre, tel que $AB = CD = a$. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs de [AD], [BC], [AC] et [BD].

1. Montrer que $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{IJ}$ et que $\vec{AB} - \vec{DC} = 2\vec{KL}$.
2. Montrer que (IJ) et (KL) sont sécantes et orthogonales.
3. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Calculer la longueur de ses côtés en fonction de a.
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré.

Exercice 9

Soit $\vec{u}(\sqrt{2} - 1; 1; \sqrt{2} + 1)$ et $\vec{v}(1; \sqrt{2} + 1; -4 + 2\sqrt{2})$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$; qu'en déduit-on pour \vec{u} et \vec{v} ?

Vérifier ce résultat par un autre calcul.

Exercice 10

Soient A, B, C, D quatre points quelconques du plan.

Démontrer que $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + CB^2) = 2\vec{DB} \cdot \vec{AC}$ à l'aide de relations de Chasles judicieusement choisies dans le premier membre.

Exercice 11

1. Soit ABC est triangle. Pour tout point M du plan, montrer l'égalité : $\vec{MA} \cdot \vec{BC} + \vec{MB} \cdot \vec{CA} + \vec{MC} \cdot \vec{AB} = 0$.

2. *Application* : montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Indication : On appelle H le point d'intersection de deux hauteurs. Montrer que H appartient aussi à la troisième hauteur.



Correction

Exercice 1

1. a) Le point D est défini par la relation suivante : $4\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ donc :

$$\begin{aligned} -4\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \\ 4\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{DC} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

D'où : **D est le barycentre du système (A,3) ; (B,-2) ; (C,3)**

1. b) On sait que :

D est le barycentre du système (A, 3) (B, -2) (C, 3),

B' est le milieu du segment [AC], donc B' est le barycentre de (A, 3) (C, 3).

D'après le théorème d'associativité du barycentre, D est le barycentre de (B', 6) (B, -2).

D appartient donc à la droite (BB'), médiatrice du segment [AC] (car ABC est un triangle équilatéral).

2. On sait que D est le barycentre de (B', 6) (B, -2). Donc :

$$\begin{aligned} 6\overrightarrow{DB'} - 2\overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ 6\overrightarrow{DB} + 6\overrightarrow{BB'} - 2\overrightarrow{DB} &= \vec{0} \\ 4\overrightarrow{DB} &= -6\overrightarrow{BB'} \\ \overrightarrow{BD} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} DA^2 &= (\overrightarrow{DB'} + \overrightarrow{B'A})^2 \\ &= DB'^2 + 2\overrightarrow{DB'} \cdot \overrightarrow{B'A} + B'A^2 \\ &= DB'^2 + 2 \times 0 + B'A^2 \text{ (car D appartient à la médiatrice de segment [AC])} \\ &= \left(\frac{1}{2}BB'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \times 3^2 \text{ (Rappel : la hauteur d'un triangle équilatéral de côté } a \text{ est égale à } \frac{a\sqrt{3}}{2}\text{)} \\ &= \frac{63}{16} \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BB'}$, alors :

$$DB^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times BB'^2$$

$$DB^2 = \frac{9}{4} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$DB^2 = \frac{243}{16}$$

4.

$$\begin{aligned} 3MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 &= 12 \\ \iff 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 - 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + 3(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2 &= 12 \\ \iff 3MD^2 + 6\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DA} + 3DA^2 - 2MD^2 - 4\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DB} - 2DB^2 + & \\ 3MD^2 + 6\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{DC} + 3DC^2 &= 12 \\ \iff 4MD^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot (3\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}) + 3DA^2 - 2DB^2 + 3DC^2 &= 12 \\ \iff 4MD^2 + 2\overrightarrow{MD} \cdot \vec{0} + 3DA^2 - 2DB^2 + 3DC^2 &= 12 \\ \text{(car D est le barycentre de (A, 3)(B, -2)(C, 3))} & \\ \iff 4MD^2 = 12 - 3DA^2 + 2DB^2 - 3DC^2 & \\ \iff 4MD^2 = 12 - 6DA^2 + 2DB^2 \text{ (} DA = DC \text{ car D appartient à la médiatrice de segment [AC])} & \\ \iff 4MD^2 = 12 - 6 \times \frac{63}{16} + 2 \times \frac{243}{16} & \\ \iff MD^2 = \frac{75}{16} & \end{aligned}$$

L'ensemble des points M est le cercle de centre D et de rayon $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

Vérifions que le centre de gravité G du triangle ABC appartient à l'ensemble (E) :

Comme ABC est un triangle équilatéral, alors $GA = GB = GC$, donc :

$$3GA^2 - 2GB^2 + 3GC^2 = 4GB^2 = 4 \times \left(\frac{2}{3}BB'\right)^2 = 4 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12$$

G appartient à l'ensemble (E).

Exercice 2

1. Montrons que $AI = \sqrt{33}$:

• Première méthode :

D'après le théorème de la médiane, on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Donc :

$$AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}$$

$$AI^2 = \frac{7^2 + 5^2 - \frac{4^2}{2}}{2}$$

$$AI^2 = \frac{49 + 25 - \frac{16}{2}}{2}$$

$$AI^2 = \frac{66}{2}$$

$$AI^2 = 33$$

D'où : $AI = \sqrt{33}$ cm.

• Deuxième méthode :

Remarquons d'abord que (AI) est la médiane du triangle ABC issue de A.

Identité du parallélogramme :

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} du plan, on a : $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

En prenant $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$, on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{AB} + \vec{AC}\| = 2\|\vec{AI}\| \text{ et } \|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{AB} - \vec{AC}\| = \|\vec{BC}\|.$$

L'identité du parallélogramme devient alors :

$$\|\vec{AI}\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \frac{1}{2}\|BC\|^2 \right)$$

$$\text{L'application numérique donne : } AI^2 = \frac{1}{2} \left(7^2 + 5^2 - \frac{1}{2} \times 4^2 \right) = 33$$

D'où : $AI = \sqrt{33}$ cm.

2. a) Pour quelle valeur du réel m le vecteur $m\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ est-il égal à un vecteur \vec{u} indépendant du point M ?

$$\begin{aligned} m\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} &= m(\vec{MI} + \vec{IA}) + (\vec{MI} + \vec{IB}) + (\vec{MI} + \vec{IC}) \\ &= (m+2)\vec{MI} + m\vec{IA} + \underbrace{\vec{IB} + \vec{IC}}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

Donc $m\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$ est indépendant du point M si et seulement si $m = -2$.

On obtient alors : $\vec{u} = -2\vec{IA}$.

2. b) Déterminons l'ensemble \mathcal{F} des points M du plan tels que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$:

Transformons $-MA^2 + MB^2 + MC^2$ afin de faire apparaître le point I.

$$\begin{aligned} -MA^2 + MB^2 + MC^2 &= MI^2 + (-IA^2 + IB^2 + IC^2) + 2\vec{MI} \cdot \underbrace{(-\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC})}_{=\vec{0}} \\ &= \left(MI^2 - 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + IA^2 \right) + (-2IA^2 + IB^2 + IC^2) \\ &= \left(\vec{MI} - \vec{IA} \right)^2 + (-2IA^2 + IB^2 + IC^2) \end{aligned}$$

Or, on remarque que $-25 = -33 + 2\hat{2} + 2\hat{2} = -IA^2 + IB^2 + IC^2$, donc :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25 \iff \left(\vec{MI} - \vec{IA} \right)^2 + (-2IA^2 + IB^2 + IC^2) = -IA^2 + IB^2 + IC^2$$

$$\iff (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 - \overrightarrow{IA}^2 = 0$$

$$\iff \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{IA}) = 0$$

Soit J le point du plan tel que $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{IA}$

On a donc que $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25 \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$.

\mathcal{F} est donc le cercle de diamètre [IJ].

Exercice 3

Ecrivons une équation cartésienne du plan \mathcal{P} , sachant que le projeté orthogonal de l'origine sur \mathcal{P} est le point $A(1; 5; 7)$:

Le vecteur \overrightarrow{OA} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} , c'est-à-dire que pour tout point $M(x; y; z)$ du plan \mathcal{P} , $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

M appartient au plan $\mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$\iff (x-1) \times (1-0) + (y-5) \times (5-0) + (z-7) \times (7-0) = 0$$

$$\iff x + 5y + 7z - 65 = 0.$$

D'où l'équation du plan \mathcal{P} .

Exercice 4

Ecrivons une équation de la sphère de centre $I(3; 1; -4)$, passant par le point $A(4; 2; 1)$:

Calculons le rayon de la sphère : $R^2 = AI^2 = (3-4)^2 + (1-2)^2 + (-4-1)^2 = 27$.

On en déduit l'équation de la sphère : $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 27$.

Exercice 5

Vérifions que $A(4; -1; 2)$ est un point de la sphère \mathcal{S} :

Transformons l'équation de \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 4z - 3 = 0 &\iff x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 + 4z - 3 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 - 3 = 3^2 + 1^2 + 2^2 \\ &\iff (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 17 \end{aligned}$$

Regardons si les coordonnées de A vérifient l'équation de \mathcal{S} :

$$(4-3)^2 + (-1+1)^2 + (2+2)^2 = 1^2 + 0^2 + 4^2 = 17.$$

Donc le point A appartient à la sphère \mathcal{S} .

Ecrivons une équation du plan tangent en A à \mathcal{S} :

Appelons ce plan \mathcal{P} .

Le centre de la sphère est le point $I(3; -1; -2)$. \overrightarrow{AI} est donc un vecteur normal au plan \mathcal{P} .

$M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{P} \iff \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

$$\iff (4-3) \times (x-4) + (-1-(-1)) \times (y+1) + (2-(-2)) \times (z-2) = 0$$

$$\iff x + 4z - 12 = 0$$

D'où l'équation du plan \mathcal{P} .

Exercice 6

Calculons la distance d du point A à la droite \mathcal{D} :

Distance d'un point à une droite dans le plan :

On considère la droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

$M(x_M; y_M; z_M)$ est un point du plan.

$$\text{La distance } d(M, \mathcal{D}) \text{ vaut ainsi : } d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{En appliquant la formule, il vient : } d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$D'o\grave{u}, d = \frac{|-1 \times (-1) + 4 \times 3 - 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2}} = \frac{11}{\sqrt{17}} = \frac{11\sqrt{17}}{17}$$

Remarque : Quand on a oublié la formule, on la redémontre...

Soit $H(x_H; y_H)$ le projeté orthogonal de A sur \mathcal{D} .

On note \mathcal{D}' la perpendiculaire à la droite \mathcal{D} passant par A.

$\vec{u}(a; b)$ est un vecteur directeur de \mathcal{D}' (car c'est un vecteur normal de \mathcal{D})

Soit $B(x_B; y_B)$ un point de \mathcal{D}

$$|\vec{AB} \cdot \vec{u}| = |\vec{AH}| \times \|\vec{u}\| = d \times \|\vec{u}\|$$

D'autre part, avec l'autre formule du produit scalaire,

$$\begin{aligned} |\vec{AB} \cdot \vec{u}| &= |(x_B - x_A) \times a + (y_B - y_A) \times b| \\ &= |-(ax_A + by_A) + ax_B + by_B| \\ &= |-(ax_A + by_A + c)| \\ &= |ax_A + by_A + c| \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que : } d = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercice 7

1. Vérifions que le triangle ABC est équilatéral :

On a facilement que $AB = BC = CA = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ donc le triangle ABC est équilatéral.

2. Les droites (AD) et (BC) sont-elles orthogonales ?

On a : $\vec{AD} \cdot \vec{BC} = (0 - 1) \times (0 - 0) + ((-1) - 0) \times (0 - 1) + (0 - 0) \times (1 - 0) = 1$

Donc les droites (AD) et (BC) ne sont pas orthogonales.

3. Calculons $\vec{CI} \cdot \vec{CJ}$:

On a $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$, donc :

$$\begin{aligned} \vec{CI} \cdot \vec{CJ} &= (x_I - x_C) \times (x_J - x_C) + (y_I - y_C) \times (y_J - y_C) + (z_I - z_C) \times (z_J - z_C) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Déduisons-en une mesure de l'angle \widehat{ICJ} :

$$\cos(\widehat{ICJ}) = \frac{\vec{CI} \cdot \vec{CJ}}{\|\vec{CI}\| \times \|\vec{CJ}\|}$$

Or, $\|\vec{CI}\| = \|\vec{CJ}\| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, donc ;

$$\cos(\widehat{ICJ}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}$$

Avec la calculatrice, on obtient : $\widehat{ICJ} = 48^\circ$.

4. Calculons les coordonnées du point H :

Le point H est l'intersection de la droite (CI) et du plan \mathcal{P} normal à la droite (CI) passant par I. On choisit pour vecteur normal de \mathcal{P} le vecteur $\vec{n} = 2\vec{CI}$ qui a pour coordonnées (1 ; 1 ; -2).

L'équation de \mathcal{P} est donc de la forme : $x + y - 2z + d = 0$.

Pour trouver d , on dit que :

$$\begin{aligned} J \in \mathcal{P} &\iff \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 + d = 0 \\ &\iff d = 0. \end{aligned}$$

D'où, $\mathcal{P} : x + y - 2z = 0$.

$$\text{D'autre part, (CI) : } \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On injecte l'équation de (CI) dans l'équation de \mathcal{P} et on trouve :

$$t + t - 2 \times (-2t + 1) = 0 \iff t = \frac{1}{3}$$

On en déduit, $H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Quel rôle joue le point H sur le triangle ABC ?

On remarque que $3\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$, donc H = G, centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 8

1. Montrons que $\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{IJ}$ et que $\vec{AB} - \vec{DC} = 2\vec{KL}$:

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{DC} &= (\vec{AI} + \vec{IJ} + \vec{JB}) + (\vec{DI} + \vec{IJ} + \vec{JC}) \\ &= 2\vec{IJ} - (\underbrace{\vec{IA} + \vec{ID}}_{=\vec{0}}) + (\underbrace{\vec{JB} + \vec{JC}}_{=\vec{0}}) \\ &= 2\vec{IJ} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \vec{AB} - \vec{DC} &= (\vec{AK} + \vec{KL} + \vec{LB}) - (\vec{DL} + \vec{LK} + \vec{KC}) \\ &= 2\vec{KL} - (\underbrace{\vec{KA} + \vec{KC}}_{=\vec{0}}) + (\underbrace{\vec{LB} + \vec{LD}}_{=\vec{0}}) \\ &= 2\vec{KL} \end{aligned}$$

2. Montrons que (IJ) et (KL) sont sécantes et orthogonales :

$$\vec{IJ} \cdot \vec{KL} = (\vec{AB} + \vec{DC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{DC}) = \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{DC}\|^2 = a^2 - a^2 = 0.$$

Donc (IJ) et (KL) sont orthogonales.

On note \mathcal{P} le plan engendré par les vecteurs \vec{AB} et \vec{DC} passant par I.

Ainsi M appartient au plan $\mathcal{P} \iff$ Il existe deux réels α et β tels que $\vec{IM} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{DC}$.

Or, $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC}$, donc $J \in \mathcal{P}$.

$$\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AK} = \frac{1}{2}(\vec{DA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{DC}, \text{ donc } K \in \mathcal{P}.$$

$$\vec{IL} = \vec{ID} + \vec{DL} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DB}) = \frac{1}{2}\vec{AB}, \text{ donc } L \in \mathcal{P}.$$

Donc, les points I, J, K et L sont coplanaires. De plus, \vec{IJ} et \vec{KL} sont non colinéaires, donc les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

3. Déterminons la nature du quadrilatère IKJL :

Les diagonales (IJ) et (KL) de ce quadrilatère sont orthogonales, donc IKJL est un losange de côté $\|\vec{IL}\| = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\| = \frac{a}{2}$.

4. Trouvons une condition nécessaire et suffisante pour que IKJL soit un carré :

$$\text{IKJL est un carré} \iff \|\vec{IJ}\| = \|\vec{KL}\|$$

$$\iff \|\vec{IJ}\|^2 = \|\vec{KL}\|^2$$

$$\iff \|\vec{AB} + \vec{DC}\|^2 = \|\vec{AB} - \vec{DC}\|^2$$

$$\iff \vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0$$

$$\iff \vec{AB} \text{ et } \vec{DC} \text{ sont orthogonaux.}$$

Exercice 9

Calculons $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{2} - 1) \times 1 + 1 \times (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + 1) \times (-4 + 2\sqrt{2}) = 0$$

Vérifions ce résultat par un autre calcul :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\iff \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \sqrt{2}^2 + 2(1 + \sqrt{2})^2 + 9(1 - \sqrt{2})^2 = 33 - 14\sqrt{2}$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(1 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2 + (5 - \sqrt{2})^2 = 33 - 14\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

D'où : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Exercice 10

Démontrons que $(AB^2 + CD^2) - (AD^2 + CB^2) = 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned} & (AB^2 + CD^2) - (AD^2 + CB^2) \\ &= (AB^2 + CD^2) - (AB^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + CD^2 + DB^2 + 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB}) \\ &= 2 \left(-BD^2 + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{BD} \right) \\ &= 2 \left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} \right) \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Exercice 11

1. Soit ABC est triangle. Pour tout point M du plan, montrer l'égalité : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

2. *Application* : montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Indication : On appelle H le point d'intersection de deux hauteurs. Montrer que H appartient aussi à la troisième hauteur.

1. **Montrons, pour tout point M du plan, l'égalité : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$:**

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} \cdot \left(\underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}_{=\vec{0}} \right) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

2. **Montrons que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes :**

Soit H le point d'intersection de la hauteur issue de A et de celle issue de B. Montrons que H appartient à la hauteur issue de C.

Pour cela, on doit montrer que $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC}}_{=0} - \underbrace{\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA}}_{=0} = 0.$$

D'où : le point H appartient à la hauteur issue de C. Les trois hauteurs d'un triangle sont donc concourantes.