

# PRODUIT SCALAIRE de l'espace

**Exercice1 :** Soit ABCDEFGH un cube de côté a  
Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC} ; \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} \text{ et } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$$

**Exercice2 :** 1) Soit A, B et C des points de l'espace tel que  $AB = \sqrt{5}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$

Calculer  $(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}$  :

2) sachant que  $\|\vec{u}\| = 2$  et  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$

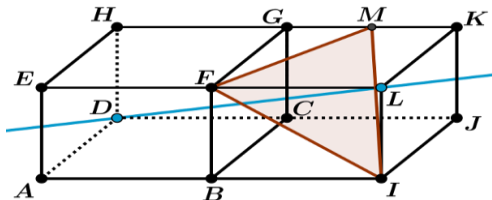
Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

**Exercice3 :** Déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}$  normal à un plan dirigé par  $\vec{u}(2, -1, 3)$  et  $\vec{v}(4, 0, 2)$ .

**Exercice4 :** Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



**Exercice5:** ABCDEFGH un cube tel que :  $AB = 1$  avec I le milieu du segment [EH] et J le milieu de [EF]

1) Montrer que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$  et que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$

2) En déduire que le vecteur  $\overrightarrow{EG}$  est normal au plan (BDE)

3) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

4) l'espace étant rapporté au repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

a) déterminer les coordonnées des points F ; C ; I et J

B) Montrer que  $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$

et en déduire que  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

**Exercice6 :** Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(4; 2; -3)$  dont un vecteur normal est  $\vec{n}(1; -2; -1)$

**Exercice7 :** ABCDEFGH un cube tel que :  $AB = 1$  avec I le milieu du segment [AE]

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

1) déterminer un vecteur normal au plan (CHI)

2) En déduire une équation cartésienne du plan (CHI)

**Exercice8 :** On considère les plans d'équations :

$$(P) 2x - 4y + z + 1 = 0 \text{ et } (P') x + y + 2z - 3 = 0$$

1) Montrer que :  $(P) \perp (P')$

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan (Q)

parallèle au plan (P) passant par le point

$$A(1; -1; 1)$$

**Exercice9 :** L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère le plan (P)

d'équation  $x + 2y - z - 1 = 0$

1) Les points  $A(1; 1; 2)$  et  $B(2; 1; 1)$  appartiennent-ils au plan (P)?

2) Calculer la distance AB puis les distances de ces deux points A et B au plan (P).

3) Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P)?

**Exercice10 :** 1) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(1, -1, 2)$  et de rayon  $R = 3$

2) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(0, -3, 0)$  et qui passe par  $A(2, 1, -1)$ .

**Exercice11 :** Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre  $\Omega(-1, 0, 2)$  et de rayon  $R = 3$

**Exercice12 :** Déterminer (S) L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y = -1 + 2 \sin \varphi \sin \theta \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + 2 \cos \varphi \end{cases}$$

**Exercice13 :** Déterminer  $(S)$  L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  dans les cas suivants :

1)  $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z = 0$

2)  $(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$

3)  $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$

**Exercice14 :** Soit :  $A(-1; 2; 1)$  et  $B(1; -1; 0)$  deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble  $(S)$  des points  $M(x; y; z)$  de l'espace tel que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

**Exercice15 :** Soient  $(S)$  une sphère :

$$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

et  $(D)$  une droite : 
$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1+t \end{cases}$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Exercice16 :** Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0$$

et  $(D)$  une droite : 
$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2+5t \end{cases}$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Exercice17 :** Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

et  $(D)$  une droite : 
$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Exercice18 :** Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$$

Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y - z + 5 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Exercice19 :** Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$$

Et le plan d'équation  $(P) : x - y + z - 3 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Exercice20 :** Soient  $(S)$  une sphère :

$$(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y + 3z - 2 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Exercice21 :** Soie  $(S)$  une sphère :

$$(S) : x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$$

Et soit le point  $A(1; -1; -1)$

Vérifier que  $A \in (S)$  et Déterminer l'équations cartésienne du plan  $(P)$  tangent a la sphère  $(S)$  en  $A$

**Exercice22 :** on considère les plans d'équations respectives  $(P) : x - y + z = 0$  et  $(Q) :$

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1; 2; 4)$  et tangente au plan  $(P)$  et soit la droite  $(\Delta)$  qui passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(Q)$

1) montrer que les plans  $(P)$  et  $(Q)$  sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$

b) déterminer le point de tangence de  $(P)$  et  $(S)$

3)a) déterminer le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(Q)$

b) Montrer que le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Exercice23:** on considère l'ensemble  $(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  de l'espace qui vérifient l'équations :

$$(S_m) : mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0$$

Avec  $m$  un paramètre non nul

1) montrer que  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$

2) montrer que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Exercice24 :** dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé On considère les plan  $(P_m)$  d'équations  $x + y - z - m = 0$  avec  $m$

paramètre réel Et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1; 2; 1)$

et le rayon  $R = \sqrt{3}$

1) Etudier et discuter suivant le paramètre  $m$  la position relative de la sphère  $(S)$  et les plan  $(P_m)$

2) soit  $(E)$  l'ensemble des réels  $m$  tels que :  $(P_m)$

coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(C_m)$

Déterminer l'ensemble des centres des cercles  $(C_m)$  lorsque  $m$  varie dans  $(E)$

**Exercice25 :** dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé on considère

l'ensemble  $(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  tq :  $(S_m)$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

avec  $m$  paramètre réel

1) Montrer que  $(S_m)$  est une sphère  $\forall m \in \mathbb{R}$

2) Déterminer l'ensemble des centres des  $(S_m)$  lorsque  $m$  varie dans  $\mathbb{R}$

3) Montrer qu'il existe un cercle  $(C)$  incluse dans tous les sphères  $(S_m) \forall m \in \mathbb{R}$  et Déterminer le plan  $(P)$  qui contient ce cercle  $(C)$

4) Soit un point  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  dans l'espace tq

$$M_0 \notin (P)$$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par  $M_0$

5) Montrer qu'il existe deux sphères  $(S_m)$  tangentes au plan  $(O; x; y)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et  
exercices

Que l'on devient un mathématicien

**Prof : Atmani najib**



# PRODUIT SCALAIRE de l'espace

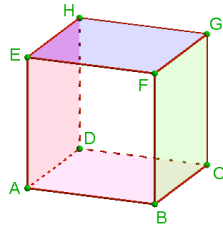
**Exercice1 :** Soit ABCDEFGH un cube de côté a  
Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC} ; \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} \text{ et } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$$

**solution :** 1) calcul de  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC}$  : on a :  $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EA}$  car ABCDEFGH cube

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = -AE \times AE = -a^2$$

(car E est le projeté orthogonales de F sur (AE))



2) calcul de  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD}$  :

Puisque ABCD est un carré

$$\text{on a : } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

$$\text{donc : } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB \times AB = -a^2$$

(car B est le projeté orthogonales de F sur (AB))

3) calcul de  $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC}$  : Puisque DCGH est un carré

$$\text{on a : } \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \text{ (} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{DC} \text{)}$$

4) calcul de  $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC}$  :

$$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{HD} = 0 \text{ (} \overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{EH} \text{)}$$

$$\text{donc : } \overrightarrow{EH} \perp \overrightarrow{GC}$$

5) calcul de  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB}$  :

On a :  $(AE) \perp (ABC)$  donc  $(AE) \perp (DB)$  car

$$(DB) \subset (ABC) \text{ donc : } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$$

**Exercice2 :** 1) Soit A, B et C des points de l'espace tel que  $AB = \sqrt{5}$  et  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$

$$\text{Calculer } (-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} :$$

$$2) \text{ sachant que } \|\vec{u}\| = 2 \text{ et } \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$$

$$\text{Calculer : } \vec{u} \cdot \vec{v}$$

**solution :** 1)

$$(-2\overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2AB^2 - 2 \times 3$$

$$= 2AB^2 - 2 \times 3 = 2 \times 5 - 6 = 4$$

$$2) \text{ On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} (5^2 - 4 - 9^2) = 6$$

**Exercice3 :** Déterminer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{n}$  normal à un plan dirigé par  $\vec{u}(2, -1, 3)$  et  $\vec{v}(4, 0, 2)$ .

**solution :** Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires : une coordonnée est nulle pour l'un mais pas pour l'autre.

On note  $\vec{n}(x, y, z)$ .

Puisque  $\vec{n}$  est normal au plan dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .

On obtient ainsi les deux équations

$$2x - y + 3z = 0 \text{ et } 4x + 2z = 0$$

A l'aide de la deuxième équation, on obtient

$$z = -2x. \text{ On remplace dans la première :}$$

$$2x - y - 6x = 0 \Leftrightarrow -4x - y = 0 \Leftrightarrow y = -4x.$$

On choisit, par exemple  $x = 1$  et on trouve ainsi  $\vec{v}(1; -4; -2)$

On vérifie :  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 4 - 6 = 0 \checkmark$  et

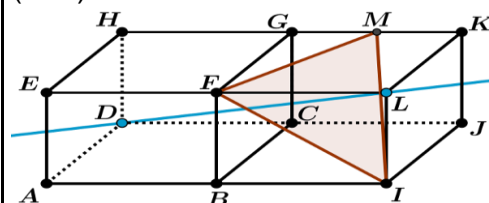
$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 4 + 0 - 4 = 0 \checkmark.$$

Un vecteur normal au plan dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est  $\vec{n}(1; -4; -2)$

**Exercice4 :** Deux cubes d'arête 1, sont disposés comme indiqué sur la figure.

M est le milieu du segment [GK].

La droite (DL) est-elle perpendiculaire au plan (FMI)?



**Solution :** on se place dans le repère

$$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}) \text{ orthonormé}$$

Voyons si  $\overrightarrow{DL}$  est un vecteur normal au plan (FMI)

Il suffit de calculer:  $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FM}$  et  $\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FI}$

$$\text{On a : } \overrightarrow{DL} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \text{ donc : } \overrightarrow{DL}(2; -1; 1)$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ donc : } \overrightarrow{FM}\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} \text{ donc : } \overrightarrow{FI}(1; 0; -1)$$

$$\overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FM} = 0 \text{ et } \overrightarrow{DL} \cdot \overrightarrow{FI} = 1 \neq 0$$

Donc : (DL) n'est pas perpendiculaire au plan (FMI)

**Exercice5:** ABCDEFGH un cube tel que :  $AB = 1$  avec  $I$  le milieu du segment  $[EH]$  et  $J$  le milieu de  $[EF]$

1) Montrer que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$  et que  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$   
 2) En déduire que le vecteur  $\overrightarrow{EG}$  est normal au plan  $(BDE)$

3) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

4) l'espace étant rapporté au repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

a) déterminer les coordonnées des points  $F$  ;  $C$  ;  $I$  et  $J$

B) Montrer que  $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$

et en déduire que  $\overrightarrow{FI}$  et  $\overrightarrow{CJ}$  sont orthogonaux

**Exercice6 :** Déterminer une équation du plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A(4; 2; -3)$  dont un vecteur normal est  $\vec{n}(1; -2; -1)$

**Solution :** Une équation du plan  $\mathcal{P}$  est de la forme  $x - 2y - z + d = 0$

Le point  $A$  appartient au plan. Ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$$4 - 2 \times 2 - (-3) + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Une équation de  $\mathcal{P}$  est donc  $x - 2y - z - 3 = 0$

**Exercice7 :** ABCDEFGH un cube tel que :  $AB = 1$  avec  $I$  le milieu du segment  $[AE]$

On se place dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

1) déterminer un vecteur normal au plan  $(CHI)$

2) En déduire une équation cartésienne du plan  $(CHI)$

**Solution :1)** soit un  $\vec{n}(x; y; z)$  un vecteur normal au

plan  $(CHI)$  donc 
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CI} = 0 \end{cases}$$

On a :  $\overrightarrow{CH}(-1; 0; 1)$  et  $\overrightarrow{CI}(-1; -1; \frac{1}{2})$

Donc : 
$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ -x - y + \frac{1}{2}x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \text{ Puisque on veut un seul vecteur normal}$$

Alors on donne par exemple :  $x = 2$  on trouve

$$\begin{cases} z = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ donc un vecteur normal est } \vec{n}(2; -1; 2)$$

2) l'équation du plan s'écrit sous forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{Donc : } 2x - y + 2z + d = 0$$

Et puisque :  $C(1; 1; 0) \in (CIH)$  donc :

$$2 - 1 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

$$\text{Donc : } (CIH) : 2x - y + 2z - 1 = 0$$

**Exercice8 :** On considère les plans d'équations :

$$(P) 2x - 4y + z + 1 = 0 \text{ et } (P') x + y + 2z - 3 = 0$$

1) Montrer que :  $(P) \perp (P')$

2) Déterminer l'équation cartésienne du plan  $(Q)$

parallèle au plan  $(P)$  passant par le point

$$A(1; -1; 1)$$

**Solutions :** 1)  $\vec{n}(2; -4; 1)$  et  $\vec{n}'(1; 1; 2)$  les deux

vecteurs normaux respectivement de  $(P)$  et  $(P)'$

$$\text{On a : } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 - 4 + 2 = 0$$

$$\text{Donc } \vec{n} \perp \vec{n}' \text{ par suite : } (P) \perp (P')$$

2)  $(P) \parallel (Q)$  et  $\vec{n}$  est normal à  $(P)$  donc est un

vecteur normal à  $(Q)$

Donc une équation cartésienne du plan  $(Q)$  est :

$$2x - 4y + z + d = 0$$

Et puisque :  $A(1; -1; 1) \in (Q)$  donc :

$$2 + 4 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$$

$$\text{Donc : } (Q) : 2x - 4y + z - 7 = 0$$

**Exercice9 :** L'espace est muni d'un repère

orthonormé  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ . On considère le plan  $(P)$

d'équation  $x + 2y - z - 1 = 0$

1) Les points  $A(1; 1; 2)$  et  $B(2; 1; 1)$  appartiennent-ils au plan  $(P)$  ?

2) Calculer la distance  $AB$  puis les distances de ces deux points  $A$  et  $B$  au plan  $(P)$ .

3) Le point A est-il le projeté orthogonal de B sur le plan (P) ?

**Solution :**  $1 + 2 \times 1 - 2 - 1 = 0$  donc les coordonnées du point A vérifient l'équation de.

On en déduit que A appartient au plan (P)

et donc que  $2 + 2 \times 1 - 1 - 1 = 2 \neq 0$

donc les coordonnées du point B ne vérifient pas l'équation de (P) On en déduit que B n'est pas un point de (P).

$$2) AB = \sqrt{(2-1)^2 + 1(2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

Calculons  $d(A;(P))$  et  $d(B;(P))$ .

On a :  $A \in (P)$  donc :  $d(A;(P)) = 0$

$$d(B;(P)) = \frac{|2 + 2 \times 1 - 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

on a :  $\overline{AB}(1;0;-1)$

3) Un vecteur normal au plan (P) est  $\vec{n}(1;2;-1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc  $\overline{AB}$  n'est pas orthogonal au plan (P).

Le point A n'est donc pas le projeté orthogonal de B sur (P).

**Exercice10 :** 1) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(1, -1, 2)$  et de rayon  $R = 3$

2) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre  $\Omega(0, -3, 0)$  et qui passe par  $A(2, 1, -1)$ .

**Solution :** 1) l'équation cartésienne de la sphère est :  $(x-1)^2 + (y-(-1))^2 + (z-2)^2 = 3^2 \Leftrightarrow$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$$

2)  $S(\Omega, R)$  la sphère de centre  $\Omega(1, -2, 0)$  et qui passe par  $A(2, 1, -1)$ .

Donc :  $\Omega A = R$

$$= \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$$

$$\Omega A = R = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

Donc l'équation cartésienne de la sphère est :

$$(x-0)^2 + (y-(-3))^2 + (z-0)^2 = \sqrt{21}^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 21 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 12 = 0$$

**Exercice11 :** Déterminer une représentation paramétrique de la sphère de centre  $\Omega(-1, 0, 2)$  et de rayon  $R = 3$

**Solution :** Le système 
$$\begin{cases} x = -1 + 3 \sin \varphi \cos \theta \\ y = 3 \sin \varphi \sin \theta \\ z = 2 + 3 \cos \varphi \end{cases}$$

$(\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2$  une représentation paramétrique de la sphère

**Exercice12 :** Déterminer (S) L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2 \sin \varphi \cos \theta \\ y = -1 + 2 \sin \varphi \sin \theta \\ z = 1 + 2 \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi; \theta) \in \mathbb{R}^2$$

**Solution :** soit  $M(x; y; z) \in (S)$

$$\text{Donc : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 1)^2 =$$

$$= (2 \sin \varphi \cos \theta)^2 + (2 \sin \varphi \sin \theta)^2 + (2 \cos \varphi)^2 = 4 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 4 \cos^2 \varphi$$

$$\text{Donc : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - (-1))^2 + (z - 1)^2 = 2^2$$

(S) L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  est donc la sphère de centre

$\Omega(1/2, -1, 1)$  et de rayon  $R = 2$

**Exercice13 :** Déterminer (S) L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  dans les cas suivants :

$$1) (S_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z = 0$$

$$2) (S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$$

$$3) (S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$$

**Solution :** 1) soit  $a=1$  et  $b=3$  et  $c=2$  et  $d=0$   
 $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 9 + 4 = 14$

Puisque  $a^2 + b^2 + c^2 - d = 14 > 0$

Donc : L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  est donc la sphère  $(S_1)$  de centre

$\Omega(1, 3, 2)$  et de rayon  $R = \sqrt{14}$

$$2) (S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 6z + 22 = 0$$

$M(x; y; z) \in (S_2)$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) + (z^2 + 6z) + 22 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-3=0 \text{ et } y+2=0 \text{ et } z+3=0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ et } y=-2 \text{ et } z=-3$$

$$\text{alors } S_2 = \{\Omega(3; -2; -3)\}$$

$$3) (S_3) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y + z + 7 = 0$$

$$M(x; y; z) \in (S_3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 + 3y) + (z^2 + z) + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{7}{2} \text{ alors } S_3 = \emptyset$$

**Exercice14** : Soit :  $A(-1; 2; 1)$  et  $B(1; -1; 0)$  deux points de l'espace

Déterminer l'ensemble  $(S)$  des points  $M(x; y; z)$

de l'espace tel que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\text{Solution : } (x+1)(x-1) + (y-2)(y+1) + (z-1)z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - y - 2 + z^2 - z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - y - z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$$

Donc  $(S)$  est la sphère de centre  $\Omega\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  et de

$$\text{rayon } R = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

**Exercice15** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$\text{et } (D) \text{ une droite : } \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1+t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } t^2 + t^2 + (t-1)^2 = 9 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \text{ ou } t = \frac{-4}{3}$$

$$x = \frac{7}{3}; y = -\frac{1}{3}; z = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = -1; y = 3; z = 3$$

la droite  $(D)$  coupe la sphère  $(S)$  en deux points

$$A\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \text{ et } B(-1; 3; 3)$$

**Exercice16** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0$$

$$\text{et } (D) \text{ une droite : } \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4+t \\ z = -2+5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 4+t \\ z = -2+5t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$(2+3t)^2 + (4+t)^2 + (-2+5t)^2 - 2(2+3t) - 4(4+t) + 2(-2+5t)t - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ Donc : } x = -2; y = 4; z = -2$$

la droite  $(D)$  coupe la sphère  $(S)$  en un seul point

$A(2; 4; -2)$  on dit que la droite  $(D)$  est tangente à  $(S)$  en  $A(2; 4; -2)$

**Exercice17** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0$$

$$\text{et } (D) \text{ une droite : } \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Étudier la position relative de la sphère et la droite

**Solution :**

$$M(x; y; z) \in (S) \cap (D) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } (-1+t)^2 + (1+2t)^2 + 2^2 + 2(-1+t) - 2(1+2t) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 1 = 0 \text{ Pas de solutions}$$

Donc la droite  $(D)$  et la sphère  $(S)$  n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

**Exercice18** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$$

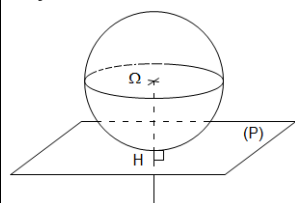
Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y - z + 5 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Solution** : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$  donc

$$(S) : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{6}^2$$

$(S)$  est donc une sphère de centre  $\Omega(1;1;0)$  et de rayon  $R = \sqrt{6}$



Et puisque :  $d(\Omega; (P)) = R = \sqrt{6}$

Alors le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  ont un unique point en commun donc le plan  $(P)$  est tangent en  $H$  à  $(S)$

Déterminons le point de tangence  $H$  qui est la projection de  $\Omega$  sur le plan  $(P)$

Soit  $\vec{n}(2; -1; -1)$  Un vecteur normal à ce plan  $(P)$

$$\exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} \vec{\Omega H} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = -k \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Donc :  $2(1+2k) - (1-k) - (-k) + 5 = 0 \Leftrightarrow k = -1$  Donc :

$$x = -1; y = 2; z = 1 \text{ Donc } H(-1; 2; 1)$$

**Exercice19** : Soient  $(S)$  une sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$$

Et le plan d'équation  $(P) : x - y + z - 3 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

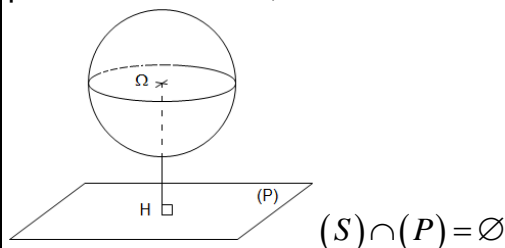
**Solution** : Déterminons le centre et le rayon de la sphère : On a :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$  donc

$$(S) : (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1^2$$

$(S)$  est donc une sphère de centre  $\Omega(1;0;-1)$  et de rayon  $R = 1$

Et puisque :  $d(\Omega; (P)) = \frac{|1-0-1-3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} > R$

Alors le plan  $(P)$  et la sphère  $(S)$  n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.



**Exercice20** : Soient  $(S)$  une sphère :

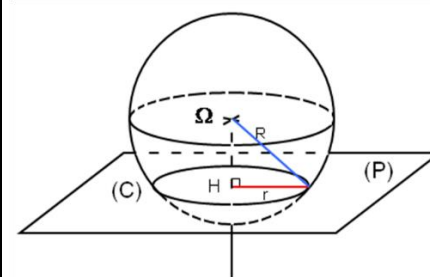
$$(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Et le plan d'équation  $(P) : 2x - y + 3z - 2 = 0$

Étudier la position relative de la sphère  $(S)$  et le plan  $(P)$

**Solution** :  $(S)$  est donc une sphère de centre  $\Omega(2;1;-3)$  et de rayon  $R = 3$

Et puisque :  $d(\Omega; (P)) = \frac{|4-1-9-2|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{8}{\sqrt{14}} < R$



Alors la sphère  $(S)$  coupe le plan  $(P)$  suivant un cercle de centre  $H$  qui est la projection orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan  $(P)$  et de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{62}{14}}$$

Déterminons le centre  $H(x; y; z)$  du cercle

Soit  $\vec{n}(2; -1; 3)$  Un vecteur normal à ce plan  $(P)$



$$\exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} \overrightarrow{\Omega H} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = -3 + 3k \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } 2(2+2k) - (1-k) + 3(-3+3k) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4}{7} \text{ Donc : } x = \frac{22}{7}; y = \frac{3}{7}; z = -\frac{9}{7}$$

$$\text{Donc } H\left(\frac{22}{7}; \frac{3}{7}; -\frac{9}{7}\right)$$

**Exercice21** : Soie  $(S)$  une sphère :

$$(S) : x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$$

Et soit le point  $A(1; -1; -1)$

Vérifier que  $A \in (S)$  et Déterminer l'équations cartésienne du plan  $(P)$  tangent a la sphère  $(S)$  en  $A$

$$\text{Solution : } 1^2 + (-1)^2 + (-1+2)^2 = 1+1+1=3$$

donc  $A \in (S)$

$\Omega(0; 0; -2)$  est le centre de la sphère  $(S)$  et de

rayon  $R=3$  Et on a :  $\overrightarrow{A\Omega}(-1; 1; -1)$

$$\text{Donc : } M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-1) + (y+1) - (z+1) = 0$$

Donc l'équation de :  $(P) : x - y + z - 1 = 0$

**Exercice22** : on considère les plans d'équations respectives  $(P) x - y + z = 0$  et  $(Q)$

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1; 2; 4)$  et tangente au

plan  $(P)$  et soit la droite  $(\Delta)$  qui passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(Q)$

1) monter que les plans  $(P)$  et  $(Q)$  sont orthogonaux

2)a) déterminer l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$

b) déterminer le point de tangence de  $(P)$  et  $(S)$

3)a) déterminer le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(Q)$

b) Montrer que le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant une cercle dont on déterminera le centre et le rayon

**Solutions** : 1) On a :  $\vec{n}(1; -1; 1)$  Un vecteur normal

à  $(P)$  et  $\vec{n}'(2; 3; 1)$  Un vecteur normal à  $(Q)$

$$\text{Et on a : } \vec{n} \cdot \vec{n}' = 1 \times 2 + (-1) \times 3 + 1 \times 1 = 0$$

Donc  $\vec{n} \perp \vec{n}'$  donc  $(P)$  et  $(Q)$  sont orthogonaux

2)a) puisque la sphère  $(S)$  est tangente

au plan  $(P)$  Alors :  $d(\Omega; (P)) = R$

$$\text{Et on a : } d(\Omega; (P)) = \frac{|1 - 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } R = \sqrt{3}$$

Donc l'équation cartésienne de la sphère  $(S)$

$$\text{est : } (S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$$

2)b) le point de tangence  $H$  de  $(P)$  et  $(S)$  est

la projection orthogonal  $\Omega$  sur le plan  $(P)$

donc  $H$  est le point d'intersection entre la droite

$(D)$  perpendiculaires a  $(P)$  passant par  $\Omega$  et

on a :  $\vec{n}(1; -1; 1)$  Un vecteur normal à  $(P)$  donc

c'est un vecteur directeur de la droite  $(D)$

la représentation paramétrique de  $(D)$  est

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$H \in (D) \cap (P) \text{ Donc : } (1+t) - (2-t) + 4+t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ donc : } H(0; 3; 3)$$

3)a) puisque  $(\Delta) \perp (Q)$  alors :

$\vec{n}(1; -1; 1)$  Un vecteur directeur de  $(\Delta)$

Et on a :  $\Omega \in (\Delta)$  donc la représentation

$$\text{paramétrique de } (\Delta) \text{ est } (\Delta) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$W(x; y; z) \in (\Delta) \cap (Q)$$

$$\text{donc : } 2(1+2t)+3(2+3t)+4+t-6=0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3}{7} \text{ donc : } W\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; \frac{18}{7}\right)$$

3°b) Montrons que le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon

$$\text{on a : } d(\Omega; (Q)) = \frac{|2+6+4-6|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} < \sqrt{3}$$

le plan  $(Q)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle de centre  $H$  qui est la projection orthogonale du point  $\Omega$  sur le plan  $(Q)$

et puisque  $(\Delta)$  passe par  $\Omega$  est perpendiculaire

à  $(Q)$  en  $W$  alors  $W\left(\frac{1}{7}; \frac{5}{7}; \frac{18}{7}\right)$  est le centre du

cercle  $(C)$  et le rayon du cercle  $(C)$  est  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

$$\text{avec } d = d(\Omega; (Q)) \text{ Donc : } r = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

**Exercice23:** on considère l'ensemble  $(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  de l'espace qui vérifient l'équation :

$$(S_m) : mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0$$

Avec  $m$  un paramètre non nul

1) montrer que  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$

2) montrer que tous les sphères se coupent suivant un seul cercle dont on déterminera le centre et le rayon

$$\text{Solution : } 1) mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(\frac{m-1}{m}\right)x + \frac{2}{m}y + \frac{2}{m}z = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(1 - \frac{1}{m}\right)x + \frac{2}{m}y + \frac{2}{m}z = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 - \frac{2}{m^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - 1 + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{m}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{m}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2}$$

$$\text{Et puisque : } \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2} > 0$$

Alors :  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$

de centre  $\Omega_m\left(1 - \frac{1}{m}; -\frac{1}{m}; -\frac{1}{m}\right)$  et de rayon

$$R_m = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{2}{m^2}}$$

2) soit  $M(x; y; z) \in (S_m) \quad \forall m \in \mathbb{R}^*$

$$\text{Donc : } mx^2 + my^2 + mz^2 - 2(m-1)x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow$$

$$m(x^2 + y^2 + z^2 - 2x) + (2x + 2y + 2z) = 0 : \forall m \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Donc le cercle cherché et l'intersection entre :

la sphère  $(S) : (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$  et le plan  $(P) :$

$$2x + 2y + 2z = 0$$

en effet le cercle existe car :

$$d(\Omega; (Q)) = \frac{|1+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

le centre  $H$  du cercle est l'intersection entre  $(P)$  et

la droite  $(\Delta)$  qui passe par  $\Omega$  est perpendiculaire

à  $(P)$  et puisque  $(\Delta) \perp (P)$  alors :  $\vec{n}(1; 1; 1)$  Un

vecteur directeur de  $(\Delta)$  Et on a :  $\Omega \in (\Delta)$  donc la

représentation paramétrique de  $(\Delta)$  est

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$$

$$\text{donc : } (1+t) + t + t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \text{ donc : } H\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

et le rayon du cercle  $(C)$  est :

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Donc : tous les sphères se coupent suivant le cercle  $(C)$

**Exercice24 :** dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé On considère les

plan  $(P_m)$  d'équations  $x + y - z - m = 0$  avec  $m$  paramètre réel Et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1;2;1)$  et le rayon  $R = \sqrt{3}$

1) Etudier et discuter suivant le paramètre  $m$  la position relative de la sphère  $(S)$  et les plan  $(P_m)$   
 2) soit  $(E)$  l'ensemble des réels  $m$  tels que :  $(P_m)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(C_m)$   
 Déterminer l'ensemble des centres des cercles  $(C_m)$  lorsque  $m$  varie dans  $(E)$

**Solution :** 1)  $(P_m) : x + y - z - m = 0$

$$d_m = d(\Omega; (P_m)) = \frac{|1+2-1-m|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|2-m|}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |2-m| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2-m < 3 \Leftrightarrow -5 < -m < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 5$$

le plan  $(P_m)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant des cercles de centre  $C_m$  qui est la projection orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan  $(P_m)$

soit  $(\Delta)$  la droite qui passe par  $\Omega$  est perpendiculaires a  $(P_m)$  et puisque  $(\Delta) \perp (P_m)$

alors :  $\vec{n}(1;1;-1)$  Un vecteur directeur de  $(\Delta)$  Et on a :  $\Omega \in (\Delta)$  donc la représentation

$$\text{paramétrique de } (\Delta) \text{ est } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

le centre  $C_m$  est le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(P_m)$

$$\text{on va donc résoudre le system } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-m=0 \end{cases}$$

$$1+t+2+t-(-t+1)-m=0 \Leftrightarrow 3t+2-m=0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{m-2}{3} \text{ donc les coordonnées du centre du}$$

cercle

$$\text{d'intersection est } \begin{cases} x=1+\frac{m-2}{3} = \frac{m+1}{3} \\ y=2+\frac{m-2}{3} = \frac{m+4}{3} \\ z=1-\frac{m-2}{3} = \frac{-m+5}{3} \end{cases}$$

$$C_m \left( \frac{m+1}{3}; \frac{m+4}{3}; \frac{-m+5}{3} \right) \text{ et le rayon est :}$$

et le rayon du cercle  $(C)$  est :

$$r = \sqrt{R^2 - d_m^2} \text{ avec } d_m = \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \text{ et } R = \sqrt{3}$$

$$r_m = \sqrt{3 - \left( \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \right)^2} \Leftrightarrow r_m = \sqrt{3 - \left( \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

$$\Leftrightarrow r_m = \sqrt{\frac{9 - (2-m)^2}{3}} = \sqrt{\frac{9 - (m^2 - 4m + 4)}{3}} = \sqrt{\frac{-m^2 + 4m + 5}{3}}$$

$$\text{2cas : Si } d(\Omega; (P_m)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |2-m| = 3 \Leftrightarrow 2-m=3 \text{ ou } 2-m=-3$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ ou } m = 5$$

la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(1;2;4)$  et tangente au plan  $(P_m)$

si  $m = -1$  : le point de tangence  $T_1$  est est le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(P_{-1})$

$$\text{on va donc résoudre le system } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$$

$$1+t+2+t-(-t+1)+1=0 \Leftrightarrow 3t+2+1=0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ donc les coordonnées du point de}$$

$$\text{tangence est } \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} \text{ donc } T_1(0;1;2)$$

si  $m = 5$  : le point de tangence  $T_2$  est est le point d'intersection de  $(\Delta)$  et  $(P_5)$

$$\text{on va donc résoudre le system } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-t \\ x+y-z-5=0 \end{cases}$$

$$1+t+2+t-(-t+1)-5=0 \Leftrightarrow 3t+2-5=0$$

$\Leftrightarrow t=1$  donc les coordonnées du point de

tangence est 
$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$$
 donc  $T_2(2;3;0)$

**3cas :** Si  $d(\Omega; (P_m)) > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2-m|}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow |2-m| > 3 \Leftrightarrow 2-m > 3 \text{ ou } 2-m < -3$$

$$\Leftrightarrow m < -1 \text{ ou } m > 5$$

$$(P_m) \cap (S) = \emptyset$$

2) les coordonnées des centres des cercles

d'intersections sont 
$$\begin{cases} x = \frac{m+1}{3} \\ y = \frac{m+4}{3} \\ z = \frac{-m+5}{3} \end{cases}$$
 et  $-1 < m < 5$

c'est une portion de droite

**Exercice 25 :** dans l'espace  $(\mathcal{E})$  est muni d'un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  orthonormé on considère

l'ensemble  $(S_m)$  des points  $M(x; y; z)$  tq :  $(S_m)$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

avec  $m$  paramètre réel

1) Montrer que  $(S_m)$  est une sphère  $\forall m \in \mathbb{R}$

2) Déterminer l'ensemble des centres des  $(S_m)$

lorsque  $m$  varie dans  $\mathbb{R}$

3) Montrer qu'il existe un cercle  $(C)$  incluse dans

tous les sphères  $(S_m) \forall m \in \mathbb{R}$  et Déterminer le

plan  $(P)$  qui contient ce cercle  $(C)$

4) Soit un point  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  dans l'espace tq

$$M_0 \notin (P)$$

Montrer qu'il existe une sphère unique qui passe par  $M_0$

5) Montrer qu'il existe deux sphères  $(S_m)$

tangentes au plan  $(O; x; y)$

**Solution :** 1)

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{m}{2}x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 2(m-1)y + (m-1)^2 - (m-1)^2$$

$$+ 2\left(\frac{m+4}{2}\right)z + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+4}{2}\right)^2 + (m-1)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{4(m-1)^2 + (m+4)^2 + m^2 - 4}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + (y+m-1)^2 + \left(z + \frac{m+4}{2}\right)^2 = \frac{6m^2 + 16}{4} = R^2$$

Et puisque :  $\frac{6m^2 + 16}{4} > 0$

Alors :  $(S_m)$  est une sphère pour tout  $m \in \mathbb{R}$

de centre  $\Omega_m \left(-\frac{m}{2}; 1-m; -\frac{m+4}{2}\right)$  et de rayon

$$R_m = \sqrt{\frac{6m^2 + 16}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{6m^2 + 16}$$

2) Déterminons l'ensemble des centres des  $(S_m)$

lorsque  $m$  varie dans  $\mathbb{R}$

les coordonnées des centres des cercles

d'intersections sont 
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}m \\ y = -m+1 \\ z = -\frac{1}{2}m-2 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

c'est une droite de vecteur directeur

$$\vec{u} \left(-\frac{1}{2}; -1; -\frac{1}{2}\right) \text{ et qui passe par } A(0; 1; -2)$$

3) Montrons qu'il existe un cercle  $(C)$  incluse dans

tous les sphères  $(S_m) \forall m \in \mathbb{R}$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2my - 2y + mz + 4z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 + m(x + 2y + z) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0 \\ (P): x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Donc le cercle cherché et l'intersection entre :

la sphère  $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2^2$  et le plan

$(P): x + 2y + z = 0$

en effet le cercle existe car :  $\Omega(0;1;-2)$

$$d(\Omega;(P)) = \frac{|0+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = 0 < 2 \text{ donc } \Omega \in (P)$$

donc le centre du cercle  $(C)$  est :  $\Omega(0;1;-2)$

et le rayon est :  $R = 2$

et tous les sphères se coupent suivant le cercle  $(C)$

et le plan  $(P)$  qui contient ce cercle  $(C)$  est :

$$(P) : x + 2y + z = 0$$

4) soit  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  dans l'espace tq  $M_0 \notin (P)$  :

$$x + 2y + z = 0 \text{ donc } x_0 + 2y_0 + z_0 \neq 0$$

Montrons qu'il existe une sphère unique qui passe par  $M_0$  : c d a l'existence d'un unique  $m$  ?

$$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0$$

$$M_0 \in (S) \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1 + m(x_0 + 2y_0 + z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 + 2y_0 + z_0) = -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1)}{x_0 + 2y_0 + z_0}$$

6) Montrons qu'il existe deux sphères  $(S_m)$

tangentes au plan  $(O; x; y)$  :

L'équation du plan :  $(O; x; y)$  est :  $z = 0$  donc

$$d(\Omega_m; (O; x; y)) = \frac{1}{2} \sqrt{6m^2 + 16} \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{m+4}{2} \right|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \sqrt{6m^2 + 16}$$

$$\Leftrightarrow |m+4| = \sqrt{6m^2 + 16} \Leftrightarrow (m+4)^2 = 6m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 6m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow m(5m - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{8}{5} \text{ donc il existe deux sphères}$$

$(S_m)$  tangentes au plan  $(O; x; y)$  :

$$(S_0) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$$

$$\left( S_{\frac{8}{5}} \right) : x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{5}x + 2\left(\frac{8}{5}-1\right)y + \left(\frac{8}{5}+4\right)z + 1 = 0$$

$$\text{Cad : } x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y + \frac{28}{5}z + 1 = 0$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et  
exercices

Que l'on devient un mathématicien

**Prof : Atmani najib**

