

TD-Géométrie analytique de l'espace SERIE D'EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice1: Soient $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de V_3
 $\vec{u}(1; -1; 2)$ et $\vec{v}(-2; 2; -4)$ et $\vec{w}(1; 1; 2)$

1) étudier la colinéarité des vecteurs \vec{u} et \vec{v}

2) étudier la colinéarité des vecteurs \vec{u} et \vec{w}

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

Exercice2 : Soit l'espace (\mathcal{E}) muni d'un repère
 $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; et considérons les points

$A(1; 2; 1)$ et $B(2; 1; 3)$ et $C(-1; 4; -3)$ et $D(2; 3; 3)$

1. étudier l'alignement des points A , B et C
2. étudier l'alignement des points A , B et D

Exercice3: $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base et Soient

$\vec{u}(2; -4; 3)$ et $\vec{v}(-1; 1; 2)$ et $\vec{w}(3; 1; -1)$

Trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires ?

Exercice4 : Considérons les vecteurs

$\vec{u}(2m+1; 3; 2-m)$ et $\vec{v}(-1; 2; 3)$ et $\vec{w}(-3; 1; 2)$

déterminer le réel m pour que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} soient coplanaires.

Exercice5 : Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Exercice6 : soit la droite (D)

de représentation $\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -k \\ z = 4 + 4k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$:

- 1) Est ce que $B(3; 2; 5)$ appartient à (D) ?
- 2) déterminer un point de la droite (D) et un vecteur directeur de (D)

Exercice7 : soient les points $A(-1; 1; 0)$

et $B(2; -1; 1)$ et $C(0; -1; 2)$

- 1) Déterminer deux équations cartésiennes de la droite (AB)

2) Est-ce que point $C(0; -1; 2) \in (AB)$?

Exercice8 : soit la droite (D) définie par les deux équations cartésiennes :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4}$$

1) déterminer un point et un vecteur directeur \vec{u} de la droite (D)

2) déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

Exercice9 : déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points :

$A(2; -1; -3)$ et $B(0; 1; 4)$ et $C(-3; 0; 0)$

Exercice10 : déterminer les coordonnées d'un point du plan (P) ainsi que les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan suivant défini par une représentation paramétrique :

$$(P) \begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + t - s \\ z = 5t - 5s \end{cases}$$

Exercice11 : Déterminer l'équation cartésienne du plan $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ qui passe par $A(1; -3; 1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-2; 4; 1)$ et $\vec{v}(-1; 0; 2)$

Exercice12 : Soient les droites (D_1) et (Δ_1) de représentations paramétriques respectives

$$(D_1) \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 4 + k \end{cases} (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_1) \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de (Δ_1) et (D_1)

Exercice13 : Soient les droites (D_2) et (Δ_2) de représentations paramétriques respectives

$$(D_2) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 - k \\ z = 2 + 3k \end{cases} (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_2) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de (D_2) et (Δ_2)

Exercice14 : Soient les droites (D_3) et (Δ_3) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x=1+k \\ y=-2 \\ z=2-1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_3) \begin{cases} x=2t \\ y=1 \\ z=3-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_3) et (Δ_3)

Exercice15 : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soient les droites (D_3) et (D_4) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x=k-3 \\ y=-k+3 \\ z=2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (D_4) \begin{cases} x=-2t+1 \\ y=2t-1 \\ z=2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_3) et (D_4)

Exercice16 : Soient les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$$(D) \begin{cases} x=k \\ y=1-k \\ z=3-2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (D') \begin{cases} x=2+6k' \\ y=-3-12k' \\ z=4+3k' \end{cases} \quad (k' \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D) et (D')

Exercice17 : Soient la droite (D_1) de

$$\text{représentations paramétrique } (D_1) \begin{cases} x=-4t+2 \\ y=2t-1 \\ z=3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et le plan (P_1) d'équation cartésienne:

$$(P_1): 3x+2y+z+1=0$$

Etudier la position relatif de (D_1) et (P_1)

Exercice18 : Soient la droite (D_2) de représentations paramétrique

$$(D_2) \begin{cases} x=-4+5t \\ y=-1-2t \\ z=-3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et le plan (P_2) d'équation cartésienne:

$$(P_2): x+3y+z+4=0$$

Etudier la position relatif de (D_2) et (P_2)

Exercice19 :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$$(P): 2x+y-z+2=0 \quad \text{et} \quad (P'): 3x+y+4z-1=0$$

Etudier la position relatif de (P) et (P')

Exercice20 :

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

Soient deux plans (Q) et (Q') d'équations cartésiennes:

$$(Q): (1-\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + z - \sqrt{2} = 0 \quad \text{et}$$

$$(Q'): (\sqrt{2}-2)x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$$

Etudier la position relatif de (Q) et (Q')

Exercice21 : Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$$(P): x-y-3z-2=0 \quad (Q): 2x+y+z-1=0$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q) .

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien



TD-Géométrie analytique de l'espace
EXERCICES D'APPLICATIONS
AVEC SOLUTIONS

Exercice1: Soient $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de V_3

$$\vec{u}(1; -1; 2) \text{ et } \vec{v}(-2; 2; -4) \text{ et } \vec{w}(1; 1; 2)$$

1) étudier la colinéarité des vecteurs \vec{u} et \vec{v}

2) étudier la colinéarité des vecteurs \vec{u} et \vec{w}

Solution1 :1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$

et $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$ Donc \vec{u} et \vec{v} sont

colinéaires

2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$

Donc \vec{u} et \vec{w} sont non colinéaires

Exercice2 : Soit l'espace (\mathcal{E}) muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; et considérons les points

$$A(1; 2; 1) \text{ et } B(2; 1; 3) \text{ et } C(-1; 4; -3) \text{ et } D(2; 3; 3)$$

1. étudier l'alignement des points A, B et C

2. étudier l'alignement des points A, B et D

Solution2 :1) $\overrightarrow{AB}(2-1; 1-2; 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1; -1; 2)$

$$\overrightarrow{AC}(-1-1; 4-2; -3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}(-2; 2; -4)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Donc A, B et C sont alignés

2) $\overrightarrow{AB}(2-1; 1-2; 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(1; -1; 2)$

$$\overrightarrow{AD}(2-1; 3-2; 3-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}(1; 1; 2)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0 \text{ Donc } A, B \text{ et } D \text{ ne sont pas}$$

alignés

Exercice : Soit l'espace (\mathcal{E}) muni d'un repère

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; et considérons les points

$$A(1, -2, 1); B(-1, 0, 1); C(0, 1, 0) \text{ et } E(7, 6, 1)$$

1. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés

Que pouvez-vous dire des points A, B et E .

2. Déterminer le point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

3. Déterminer le centre de ce parallélogramme.

Exercice3: $B(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base et Soient

$$\vec{u}(2; -4; 3) \text{ et } \vec{v}(-1; 1; 2) \text{ et } \vec{w}(3; 1; -1)$$

Trois vecteurs

Est-ce que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires ?

Solution3 :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 2(-1-2) + 4(1-6) + 3(-1-3) = -38 \neq 0$$

Donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont non coplanaires

Exercice4 : Considérons les vecteurs

$$\vec{u}(2m+1; 3; 2-m) \text{ et } \vec{v}(-1; 2; 3) \text{ et } \vec{w}(-3; 1; 2)$$

déterminer le réel m pour que les vecteurs

\vec{u} et \vec{v} et \vec{w} soient coplanaires.

Solution4: \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires ssi

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = 0$$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2m+1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2-m & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2m+1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (2-m) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ssi } 1(2m+1) - 21 + 5(2-m) = 0 \Leftrightarrow -3m = 10 \Leftrightarrow m = -\frac{10}{3}$$

Exercice5 : Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Exercice5 : On calcul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$$

On a : $\Delta \neq 0$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-25}{-15} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{2}{15}$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-12}{-15} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{15}; \frac{4}{5} \right) \right\}$$

Exercice6 : soit la droite (D)

$$\text{de représentation } \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -k \\ z = 4 + 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) :$$

- 1) Est ce que B (3 ; 2 ; 5) appartient à (D) ?
- 2) déterminer un point de la droite (D) et un vecteur directeur de (D)

Solution 6: 1) B (3 ; 2 ; 5) appartient à (D) si et seulement si il existe k tel que :

$$\begin{cases} 3 = -3 + 2k \\ 2 = -k \\ 5 = 4 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -2 \\ k = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ce qui est impossible donc B n'appartient pas à (D).

- 2) la droite (D) passe par le point $A(-3; 0; 4)$ et $\vec{u}(2; -1; 4)$ est un vecteur directeur de (D)

Exercice7 : soient les points $A(-1; 1; 0)$

et $B(2; -1; 1)$ et $C(0; -1; 2)$

- 1) Déterminer deux équations cartésiennes de la droite(AB)
- 2) Est-ce que point $C(0; -1; 2) \in (AB)$?

Solution7 : $\overline{AB}(3; -2; 1)$

Donc : $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$ les deux équations

cartésiennes de la droite(AB)

On remplace les coordonnées de C dans les équations de la droite(AB)

Et puisque : $\frac{0+1}{3} \neq \frac{-1-1}{-2}$ donc $C \notin (AB)$

Exercice8 : soit la droite (D) définie par les

deux équations cartésiennes :

$$\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4}$$

- 1) déterminer un point et un vecteur directeur \vec{u} de la droite (D)
- 2) déterminer une représentation paramétrique de la droite (D)

Solution8 : 1) $\frac{2x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{3-4z}{4} \Leftrightarrow$

$$\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3} = \frac{y-(-1)}{4} = \frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{6} = \frac{y-(-1)}{8} = \frac{\left(z-\frac{3}{4}\right)}{-2}$$

(D) la droite passant par le point $A\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{3}{4}\right)$ et

de vecteur directeur $\vec{u}(6; 8; -2)$

2) une représentation est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 6k \\ y = -1 + 8k \\ z = \frac{3}{4} - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) :$

Exercice9 : déterminer une représentation paramétrique du plan passant par les points :

$A(2; -1; -3)$ et $B(0; 1; 4)$ et $C(-3; 0; 0)$

Solution9 : ABC est le plan passant par $A(2; -1; -3)$ et $\overline{AB}(-2; 2; 7)$ et $\overline{AC}(-5; 1; 3)$

Sont deux vecteurs directeurs

Donc une représentation paramétrique du plan

$$ABC \text{ est : } \begin{cases} x = 2 - 2t - 5t' \\ y = -1 + 4t + t' \\ z = -3 + 7t + 3t' \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } (t' \in \mathbb{R})$$

Le dernier système est une représentation paramétrique du plan (ABC)

Exercice10 : déterminer les coordonnées d'un point du plan (P) ainsi que les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan suivant défini par une représentation paramétrique :

$$(P) \begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + t - s \\ z = 5t - 5s \end{cases}$$

Solution10 :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + t - s \\ z = 5t - 5s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = 2 + 1t - 1s \\ z = 0 + 5t - 5s \end{cases}$$

vous pouvez alors en déduire que c'est un plan passant par le point

A et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} :

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercice11 : Déterminer l'équation cartésienne du plan $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ qui passe par $A(1; -3; 1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(-2; 4; 1)$ et $\vec{v}(-1; 0; 2)$

Solution11 : $M(x; y; z) \in P(A; \vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \det(\overline{AM}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$

$$\overline{AM} (x-1; y+3; z-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y+3 & 4 & 0 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y+3) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$8(x-1) + 3(y+3) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow 8x - 8 + 3y + 9 + 4z - 4 = 0$$

$$(P) : 8x + 3y + 4z - 3 = 0$$

Exercice12 : Soient les droites (D_1) et (Δ_1) de représentations paramétriques respectives

$$(D_1) \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 2 - 2k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + k \end{cases} \quad (\Delta_1) \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de (Δ_1) et (D_1)

Solution12 : on a : $\vec{u}(1; -2; 1)$ un vecteur directeur de (D_1) et $\vec{v}(-1; 2; 1)$ un vecteur directeur de (Δ_1)

et puisque : $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont

non colinéaires donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -2 + k = -1 - t \\ 2 - 2k = 2t \\ 4 + k = 1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + k = 1 \\ t + k = 1 \\ t - k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + k = 1 \\ t - k = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 4 \\ t - k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ k = -1 \end{cases} \quad \text{On remplaçant } t = 2 \text{ dans}$$

l'équation paramétriques de (Δ_1) On trouve :

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{Donc les droites } (\Delta_1) \text{ et } (D_1) \text{ se coupent}$$

en $E(-3; 4; 3)$

Exercice13 : Soient les droites (D_2) et (Δ_2) de représentations paramétriques respectives

$$(D_2) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 - k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + 3k \end{cases} \quad (\Delta_2) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relative de (D_2) et (Δ_2)

Solution13 : on a $\vec{u}(1; -1; 3)$ un vecteur directeur de (D_2) et $\vec{v}(2; -1; 1)$ un vecteur directeur de (Δ_2)

et puisque : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont

non colinéaires donc les droites (D_2) et (Δ_2) sont non parallèles

on va déterminer l'intersection de (Δ_1) et (D_1)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 1 + k = 2t \\ -2 - k = 1 - t \\ 2 + 3k = 3 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2t = -1 \\ k - t = -3 \\ 3k - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2t = -1 \\ k - t = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ t = -2 \end{cases} \quad \text{mais le couple } (k; t) = (-5; -2) \text{ ne}$$

vérifie pas l'équation $3k - t = 1$

Car : $3(-5) - (-2) = -13 \neq 1$

Donc le système n'admet pas de solutions

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Methode2 : on a (D_2) passe par $A(1; -2; 2)$ et de vecteur directeur de $\vec{u}(1; -1; 3)$

et (Δ_2) passe par $B(0; 1; 3)$ et de vecteur directeur de

$\vec{AB}(-1; 3; 1)$ on va voir si les Les vecteurs $\vec{u}(1; -1; 3)$ et $\vec{v}(2; -1; 1)$ et $\vec{AB}(-1; 3; 1)$ sont coplanaires ??

$$\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(\vec{AB}; \vec{u}; \vec{v}) = 14 \neq 0 \text{ Donc les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v}$$

et \vec{AB} sont non coplanaires

Donc les droites (Δ_1) et (D_1) sont non coplanaires

Exercice14 : Soient les droites (D_3) et (Δ_3) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 \\ z = 2 - 1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (\Delta_3) \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_3) et (Δ_3)

Solution14 : on a (D_3) passe par $A(1; -2; 2)$

et de vecteur directeur de $\vec{u}(1; 0; -1)$

et (Δ_3) passe par $B(0; 1; 3)$ et de vecteur

directeur de $\vec{v}(2; 0; -2)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1; 0; -1)$

et $\vec{v}(2; 0; -2)$ sont colinéaires

Car : $\vec{v} = 2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont parallèles

On remarque aussi que : $A \notin (\Delta_3)$

$$\text{car } \begin{cases} 1 = 2t \\ -2 = 1 \\ 2 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = t \\ -\frac{1}{2} = t \\ 2 = 3 - 2t \end{cases}$$

Donc les droites (D_3) et (Δ_3) sont strictement parallèles

Exercice15 : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soient les droites (D_3) et (D_4) de représentations paramétriques respectives

$$(D_3) \begin{cases} x = k - 3 \\ y = -k + 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (D_4) \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D_3) et (D_4)

Solution15 : on a (D_3) passe par $A(-3; 3; 2)$ et

de vecteur directeur de $\vec{u}(1; -1; 0)$

et (D_4) passe par $B(1; -1; 2)$ et de vecteur

directeur de $\vec{v}(-2; 2; 0)$

on peut voir que les Les vecteurs $\vec{u}(1; -1; 0)$

et $\vec{v}(-2; 2; 0)$ sont colinéaires

Car : $\vec{v} = -2\vec{u}$ Donc les droites (D_3) et (D_4)

Sont parallèles

On remarque aussi que :

$$A \in (D_4) \text{ car } \begin{cases} -3 = -2t + 1 \\ 3 = 2t - 1 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = t \\ 2 = t \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Donc les droites (D_3) et (D_4) sont confondues

Exercice16 : Soient les droites (D) et (D') de représentations paramétriques respectives :

$$(D) \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = 3 - 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad (D') \begin{cases} x = 2 + 6k' \\ y = -3 - 12k' \\ z = 4 + 3k' \end{cases} \quad (k' \in \mathbb{R})$$

Etudier la position relatif de (D) et (D')

Solution16 :

$M(x; y; z)$ appartient à (D) et (D') si et seulement si il existe k et k' réels tels que :

$$\begin{cases} k = 2 + 6k' \\ 1 - k = -3 - 12k' \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 + 6k' \\ 1 - 2 - 6k' = -3 - 12k' \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k' = -\frac{1}{3} \\ 3 - 2k = 4 + 3k' \end{cases}$$

Cette dernière égalité sert à vérifier notre résultat :

$$3 - 2k = 3 - 0 = 3 \text{ et } 4 + 3k' = 4 - 1 = 3.$$

$k = 0$ et $k' = -\frac{1}{3}$ donc (D) et (D') possèdent un unique point commun C

Donc les coordonnées peuvent être calculées à l'aide de k ou k' : $C(0; 1; 3)$

(D) et (D') sont alors contenues dans le plan (P) passant par C et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1; -1; -2)$ et $\vec{v}(6; -12; 3)$

Exercice17 : Soient la droite (D₁) de

$$\text{représentations paramétrique}(D_1) \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

et le plan (P₁) d'équation cartésienne:

$$(P_1): 3x + 2y + z + 1 = 0$$

Etudier la position relatif de (D₁) et (P₁)

Solution17 :

on a (D₁) est de vecteur directeur $\vec{u}(-4; 2; 3)$

Et on a : $3(-4) + 2 \times 2 + 3 \neq 0$

donc (D₁) coupe (P₁) en un point unique

on a $M(x; y; z) \in (D_1) \cap (P_1) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} /$

$$\begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \\ 3x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \\ 3(-4t + 2) + 2(2t - 1) + 3t + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = -2 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \text{ donc } (D_1) \text{ coupe } (P_1)$$

au point A(-2; 1; 3)

Exercice18 : Soient la droite (D₂) de représentations paramétrique

$$(D_2) \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

et le plan (P₂) d'équation cartésienne:

$$(P_2): x + 3y + z + 4 = 0$$

Etudier la position relatif de (D₂) et (P₂)

Solution18 : on a (D₂) est de vecteur directeur

$\vec{u}(5; -2; 1)$ et on a : $5 + 3(-2) + 1 = 0$

donc (D₂) est parallèle a (P₂)

on va déterminer l'intersection de (D₂) et (P₂)

Donc on va résoudre le système suivant :

$$\text{on a } M(x; y; z) \in (D_2) \cap (P_2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ x + 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ (-4 + 5t) + 3(-1 - 2t) + (-3 + t) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3 + t \\ -6 = 0 \end{cases}$$

Donc le système n'admet pas de solutions donc (D₂) ne coupe pas le plan (P₂)

Donc (D₂) strictement parallèles a (P₂)

Exercice19 :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$)

Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes:

$$(P): 2x + y - z + 2 = 0 \text{ et } (P'): 3x + y + 4z - 1 = 0$$

Etudier la position relatif de (P) et (P')

Solution19 : on a : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc (P) et

(P') se coupent suivant une droite (D)

Déterminons une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (P')

(D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$M(x; y; z) \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ 3x + y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = z - 2 \\ 3x + y = -4z + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z + 3 \\ y = -5z - 8 \end{cases} \text{ et on pose } (z = t)$$

$$\text{Donc : } (D) \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -8 - 5t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

(D) est la droite qui passe par le point

A(-3; -8; 0) et de vecteur directeur $\vec{u}(3; -5; 1)$

Exercice20 :

L'espace est muni d'un repère (O; $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$)

Soient deux plans (Q) et (Q') d'équations cartésiennes:

$$(Q): (1 - \sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + z - \sqrt{2} = 0 \text{ et}$$

$$(Q'): (\sqrt{2} - 2)x - y + \sqrt{2}z - 2 = 0$$

Etudier la position relative de (Q) et (Q')

Solution20 : on a : $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}-2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ et

$$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$$

donc $(Q) \parallel (Q')$

et puisque : $-\sqrt{2} \neq -2$

(Q) et (Q') sont strictement parallèles

Exercice21 : Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :

$$(P): x - y - 3z - 2 = 0 \quad (Q): 2x + y + z - 1 = 0$$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q) .

Solution21 : (D) a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x - y - 3z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x - y - 3z - 2 = 0 \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre, par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z .

$$\begin{cases} x = y + 3z + 2 \\ 2(y + 3z + 2) + y + z - 1 = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3z + 2 \\ 3y + 7z + 3 = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{7}{3}z + 3z + 2 \\ y = -1 - \frac{7}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}z \\ y = -1 - \frac{7}{3}z \\ z = z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est

$$\text{donc : } (D) \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}k \\ y = -1 - \frac{7}{3}k \\ z = 0 + 1k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

(D) passe donc par le point $A (1 ; -1 ; 0)$ et a

pour vecteur directeur $\vec{u} \left(\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}; 1 \right)$

